

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

A , B e C são conjuntos não vazios de inteiros positivos e $|X|$ representa a cardinalidade de um conjunto X . Sabe-se que:

- $|A| = |B| = |C|$
- $|A \cap \overline{(B \cup C)}| = |\overline{A} \cap B \cap C|$
- $|A \cap B| < |A \cap C| < |B \cap C|$

O menor valor possível para a soma dos elementos de $A \cup B \cup C$ é:

A () 21

B () 36

C () 45

D () 55

E () 78

Gabarito: A

A comparação das regiões do diagrama de Venn permite obter a menor cardinalidade da união. A menor soma usa os primeiros inteiros positivos.

Etapla 1. Relacione as cardinalidades das regiões.

Sejam a , b e c as cardinalidades das regiões exclusivas de A , B e C , respectivamente, e x a cardinalidade da interseção tripla. A segunda condição informa que a região de $B \cap C$ fora de A também tem a elementos. Como os três conjuntos têm a mesma cardinalidade, a região de $A \cap C$ fora de B tem b elementos, e a de $A \cap B$ fora de C tem c elementos. Assim, a cardinalidade comum é

$$m = a + b + c + x.$$

As interseções dadas no enunciado impõem $c + x < b + x < a + x$, ou seja, $c < b < a$.

Etapla 2. Determine o menor tamanho da união.

Pelo princípio da inclusão-exclusão, a cardinalidade N da união satisfaz

$$\begin{aligned} N &= 3m - (a + x) - (b + x) - (c + x) + x \\ &= 2a + 2b + 2c + x. \end{aligned}$$

Como a , b , c e x são inteiros não negativos, os menores valores compatíveis são $c = 0$, $b = 1$, $a = 2$ e $x = 0$. Portanto, $N \geq 6$.

Etapla 3. Calcule a menor soma e verifique que ela é atingida.

A soma de seis inteiros positivos distintos é, no mínimo,

$$\begin{aligned} S_{\min} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= \boxed{21}. \end{aligned}$$

Esse valor é atingido por $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 6\}$ e $C = \{3, 4, 5\}$, que satisfazem as três condições.

Questão 2

O número de soluções inteiras da inequação

$$\frac{(x+1)(x^9-1)(x^2-x+1)(x^2-10x+21)}{(x^6-1)(x^6+x^3+1)} < 0$$

é:

A () 3

B () 4

C () 5

D () 6

E () 7

Gabarito: A

A fatoração permite cancelar os fatores comuns e reduzir a inequação a uma expressão quadrática, respeitando o domínio original.

Etapla 1. Fatore e simplifique a expressão.

Os fatores de maior grau podem ser escritos como

$$x^9 - 1 = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1),$$

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1),$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Para x real, o denominador original se anula apenas em $x = -1$ e $x = 1$. Fora desses valores, o cancelamento reduz a expressão a

$$\begin{aligned} R(x) &= x^2 - 10x + 21 \\ &= (x - 5)^2 - 4. \end{aligned}$$

Etapla 2. Resolva a inequação e conte os inteiros.

A condição $R(x) < 0$ equivale a

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 &< 4, \\ |x - 5| &< 2, \\ -2 &< x - 5 < 2, \\ 3 &< x < 7. \end{aligned}$$

Os inteiros 4, 5 e 6 pertencem ao domínio original. Logo, o número de soluções inteiras é 3.

Questão 3

Seja i tal que $i^2 = -1$. O valor do número real a que satisfaz à equação

$$\operatorname{cis}(7\pi/6) - 2 \operatorname{cis}(-7\pi/6) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -i & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} & a \\ i^5 & \sqrt{3} & -i/2 \end{vmatrix}$$

é:

A () 3

B () $\sqrt{3}/2$

C () $\sqrt{3}/4$

D () $\sqrt{3}/8$

E () $\sqrt{3}/16$

Gabarito: E

O determinante e a expressão trigonométrica serão escritos na forma algébrica. A igualdade das partes reais determina a .

Etapa 1. Calcule o determinante.

Denotando o determinante por D e usando $i^2 = -1$ e $i^6 = -1$:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{3i}{2} - i^6 a - \frac{i^2 \sqrt{3}}{4} + 3a \\ &= 4a + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Etapa 2. Escreva o lado esquerdo na forma algébrica.

Pela definição $\text{cis } \theta = \cos \theta + i \sin \theta$:

$$\begin{aligned} \text{cis} \left(\frac{7\pi}{6} \right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \\ \text{cis} \left(-\frac{7\pi}{6} \right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Logo, o lado esquerdo da equação vale $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

Etapa 3. Iguale as partes reais.

As partes imaginárias já são iguais. Para as partes reais:

$$\begin{aligned} 4a + \frac{\sqrt{3}}{4} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 4a &= \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ a &= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{16}}. \end{aligned}$$

Questão 4

Seja o polinômio $g(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + bx^2 + bx - 2b$. O valor do maior inteiro k para o qual $g(x)$ é divisível por $(x+2)^k$ para algum b inteiro é:

A () 1

B () 2

C () 3

D () 4

E () 5

Gabarito: B

A fatoração de $g(x)$ mostra quantas vezes o fator $x+2$ pode aparecer, conforme o valor de b .

Etapa 1. Fatore o polinômio.

Agrupando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+2)(x^4 - x^3 + bx - b) \\ &= (x+2)(x-1)(x^3 + b). \end{aligned}$$

Portanto, $x+2$ já aparece como fator pelo menos uma vez.

Etapa 2. Determine quando surge outro fator $x+2$.

Como $x-1$ não se anula em $x=-2$, outro fator $x+2$ deve vir de $x^3 + b$. Pelo teorema do resto:

$$\begin{aligned}(-2)^3 + b &= 0, \\ b - 8 &= 0, \\ b &= 8.\end{aligned}$$

Etapla 3. Verifique a multiplicidade máxima.

Para $b = 8$, a soma de cubos fornece

$$g(x) = (x + 2)^2(x - 1)(x^2 - 2x + 4).$$

Em $x = -2$, o fator quadrático vale 12 e o fator linear $x - 1$ vale -3 . Não há outro fator $x + 2$, de modo que $k = 2$.

Questão 5

Considere a função real

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^4 - x^3}{x - 1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

O maior valor de a real para o qual $0 < |x - 1| < a \Rightarrow |f(x) - 1| < 1$ é:

A () $\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}$

B () $\frac{1}{2}$

C () $\sqrt[3]{2}$

D () $-1 + \sqrt[3]{2}$

E () 1

Gabarito: D

A condição sobre $f(x)$ será resolvida separadamente de cada lado de $x = 1$. O maior a é a menor distância entre 1 e os limites encontrados.

Etapla 1. Resolva a condição para $x > 1$.

Nesse ramo, o fator $x - 1$ pode ser cancelado:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3(x - 1)}{x - 1} \\ &= x^3.\end{aligned}$$

Como $f(x) > 1$, a condição $|f(x) - 1| < 1$ se reduz a $f(x) < 2$. Assim, $1 < x < \sqrt[3]{2}$.

Etapla 2. Resolva a condição para $x < 1$.

Também nesse ramo $f(x) > 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}-2x + 3 &< 2, \\ -2x &< -1, \\ x &> \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

O intervalo permitido à esquerda é $\frac{1}{2} < x < 1$.

Etapla 3. Escolha o maior raio em torno de 1.

As distâncias aos limites são $\frac{1}{2}$ e $\sqrt[3]{2} - 1$. A segunda é a menor, logo

$$a_{\max} = \sqrt[3]{2} - 1.$$

O valor de $f(1)$ não interfere, pois a condição $0 < |x - 1|$ exclui $x = 1$.

Questão 6

Uma matriz quadrada M é dita ortogonal se $M \times M^T = I$, em que I é a matriz identidade. O conjunto solução S contendo os valores de a , b e c para que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & a & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{4} & 2b & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

seja ortogonal é:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} () S &= \left\{ a = \frac{1}{2}; b = -\frac{\sqrt{3}}{2}; c = 1 \right\} & \mathbf{B} () S &= \left\{ a = \frac{1}{2}; b = \frac{\sqrt{3}}{2}; c = 1 \right\} & \mathbf{C} () S &= \left\{ a = \frac{1}{2}; b = \frac{\sqrt{3}}{2}; c = -1 \right\} \\ \mathbf{D} () S &= \left\{ a = -\frac{1}{2}; b = \frac{\sqrt{3}}{2}; c = -1 \right\} & \mathbf{E} () S &= \emptyset \end{aligned}$$

Gabarito: E

A igualdade $MM^T = I$ exige que as entradas da diagonal do produto sejam 1 e as demais sejam nulas. Essas condições são incompatíveis para b .

Etapla 1. Calcule as condições da diagonal.

Cada entrada diagonal de MM^T é a soma dos quadrados dos elementos da linha correspondente. A primeira já vale 1. As outras fornecem

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + a^2 &= 1, \\ a^2 &= \frac{1}{4}, \\ b^2 + \frac{1}{16} + 4b^2 &= 1, \\ 5b^2 &= \frac{15}{16}, \\ b^2 &= \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{4} + \frac{3}{4} &= 1, \\ c^2 &= 1. \end{aligned}$$

Etapla 2. Verifique uma entrada fora da diagonal.

A entrada $(1, 3)$ do produto é o produto escalar da primeira linha de M com a terceira. Para que seja nula:

$$\begin{aligned} 2b &= 0, \\ b &= 0. \end{aligned}$$

Isso contradiz $b^2 = \frac{3}{16}$. Portanto, $S = \emptyset$.

Questão 7

Seja uma matriz com 100 linhas e 100 colunas. O elemento da linha i e coluna j é denotado por a_{ij} . Os elementos da matriz formam uma progressão aritmética (PA) de razão 5. O primeiro termo da progressão é o elemento $a_{1,1}$ e tem seu valor igual a 10. Para formar essa PA, percorrem-se os elementos de uma mesma linha e, concluída uma linha, passa-se para a próxima. Se n é o traço da matriz, a soma dos algarismos de n é:

A () 10

B () 19

C () 23

D () 28

E () 32

Gabarito: B

Identifica-se a posição de cada elemento na PA para obter os termos da diagonal principal e somá-los. Considera-se que cada nova linha é percorrida da primeira à última coluna.

Etapa 1. Determine o termo geral da matriz.

Antes da linha i , há $100(i - 1)$ termos. Assim, a_{ij} ocupa a posição $100(i - 1) + j$ da PA:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 10 + 5[100(i - 1) + j - 1] \\ &= 500i + 5j - 495. \end{aligned}$$

Etapa 2. Some os elementos da diagonal.

Na diagonal principal, $j = i$. Seus elementos também formam uma PA:

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 505i - 495 \\ &= 10 + 505(i - 1). \end{aligned}$$

O traço é a soma dos 100 termos dessa PA:

$$\begin{aligned} n &= \frac{10 + [10 + 505 \cdot 99]}{2} \cdot 100 \\ &= 2500750. \end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule a soma dos algarismos.

A soma dos algarismos do traço é

$$\begin{aligned} S &= 2 + 5 + 0 + 0 + 7 + 5 + 0 \\ &= \boxed{19}. \end{aligned}$$

Questão 8

O intervalo que contém os valores de x tais que

$$0,09^{(4+x)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{0,3}} \right)^{x^2} \right]^2 < x^2 - (x+1)(x-1)$$

é:

A () $(-\infty, 4) \cup (8, \infty)$ B () $(-2, 4)$ C () $(4, 8)$ D () $(-\infty, \infty)$ E () $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$

Gabarito: B

As potências serão escritas na base 0,3. Como essa base está entre 0 e 1, a comparação dos expoentes inverte o sentido da desigualdade.

Etapa 1. Simplifique os dois lados da inequação.

O lado direito é constante:

$$\begin{aligned}x^2 - (x+1)(x-1) &= x^2 - (x^2 - 1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

No lado esquerdo, $0,09 = (0,3)^2$. As potências se reduzem a

$$\begin{aligned}L(x) &= (0,3)^{2(4+x)}(0,3)^{-x^2} \\ &= (0,3)^{-x^2+2x+8}.\end{aligned}$$

Etapa 2. Compare os expoentes e obtenha o intervalo.

Como $1 = (0,3)^0$ e a função exponencial é decrescente, a condição $L(x) < 1$ equivale a

$$\begin{aligned}-x^2 + 2x + 8 &> 0, \\ -(x+2)(x-4) &> 0.\end{aligned}$$

O produto é positivo entre as raízes. O conjunto solução exato, correspondente à alternativa B, é

$$x \in (-2, 4).$$

Questão 9

Seja i tal que $i^2 = -1$. Seja A dado pela equação:

$$A = \sum_{n=1}^{1000} \left[(i)^{2n-2} \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{(-1)^{n-1}} \right]$$

O valor de e^{-A} é:

A () 250

B () 500

C () 501

D () 1000

E () 1001

Gabarito: C

A potência de i cancela o sinal que surge ao retirar o expoente do logaritmo. A soma restante é telescópica.

Etapa 1. Simplifique o termo geral.

Usando $i^2 = -1$ e a propriedade do logaritmo de uma potência:

$$\begin{aligned}i^{2n-2} &= (-1)^{n-1}, \\ \ln \left[\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{(-1)^{n-1}} \right] &= (-1)^{n-1} \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right).\end{aligned}$$

O produto dos dois fatores $(-1)^{n-1}$ vale 1. Portanto,

$$A = \sum_{n=1}^{1000} \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right).$$

Etapa 2. Efetue o cancelamento telescópico.

Escrevendo cada logaritmo como uma diferença, os termos intermediários se cancelam:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{n=1}^{1000} [\ln(n+1) - \ln(n+2)] \\
 &= \ln 2 - \ln 1002 \\
 &= \ln\left(\frac{2}{1002}\right).
 \end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule a exponencial pedida.

O sinal negativo inverte a razão dentro do logaritmo:

$$\begin{aligned}
 e^{-A} &= e^{\ln(1002/2)} \\
 &= \frac{1002}{2} \\
 &= \boxed{501}.
 \end{aligned}$$

Questão 10

Sejam dois dados cúbicos (com faces numeradas de 1 a 6) e um dado na forma de dodecaedro (com faces numeradas de 1 a 12). Em cada tipo de dado, todas as faces possuem mesma probabilidade de ocorrência. Com um único lançamento de cada dado, a probabilidade de se obter maior pontuação com o dodecaedro do que com os dois dados cúbicos somados é:

A () 2/3

B () 1/6

C () 7/36

D () 5/12

E () 3/16

Gabarito: D

Os casos serão separados pela soma dos dados cúbicos. Para cada soma, contam-se os resultados do dodecaedro que a superam.

Etapa 1. Conte os resultados favoráveis em cada caso.

Se a soma dos cubos é s , há $12 - s$ faces favoráveis no dodecaedro. Seja N_s o número de pares ordenados dos cubos que produzem essa soma.

Soma s	Pares N_s	Faces $12 - s$	Resultados favoráveis
2	1	10	10
3	2	9	18
4	3	8	24
5	4	7	28
6	5	6	30
7	6	5	30
8	5	4	20
9	4	3	12
10	3	2	6
11	2	1	2
12	1	0	0

Cada caso tem probabilidade $\frac{N_s(12-s)}{12 \cdot 6^2}$.

Etapa 2. Some as probabilidades.

Os casos são mutuamente exclusivos e totalizam 180 resultados favoráveis. Como há $12 \cdot 6^2$ resultados equiprováveis:

$$P = \frac{180}{12 \cdot 6^2}$$

$$= \boxed{\frac{5}{12}}.$$

Questão 11

O valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\arctg\left(\frac{1}{3}\right) + \arctg\left(\frac{1}{4}\right) + \arctg\left(\frac{1}{5}\right) + \arctg\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}$$

é:

A () 10

B () 6

C () 7

D () 47

E () 52

Gabarito: D

A fórmula da tangente da soma permite agrupar os quatro arcos em dois pares e obter uma equação para n .

Etapa 1. Calcule a tangente de cada par.

Sejam $\alpha = \arctg(1/3)$, $\beta = \arctg(1/4)$, $\gamma = \arctg(1/5)$ e $\theta = \arctg(1/n)$. Para o primeiro par:

$$t = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{12}}$$

$$= \frac{7}{11}.$$

Para o segundo par:

$$u = \tan(\gamma + \theta) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{5n}}$$

$$= \frac{n+5}{5n-1}.$$

Etapa 2. Imponha que a soma dos arcos seja $\pi/4$.

A tangente da soma deve valer 1:

$$\frac{t+u}{1-tu} = 1,$$

$$t+u = 1-tu.$$

Substituindo os valores de t e u :

$$\frac{7}{11} + \frac{n+5}{5n-1} = 1 - \frac{7(n+5)}{11(5n-1)}.$$

Etapa 3. Resolva a equação para n .

Multiplicando por $11(5n-1)$ e reunindo os termos:

$$46n + 48 = 48n - 46,$$

$$2n = 94,$$

$$n = \boxed{47}.$$

Para esse valor, a soma dos quatro arcos está entre 0 e $\pi/2$. Assim, a tangente igual a 1 corresponde a $\pi/4$.

Questão 12

Considere duas circunferências no plano cartesiano Oxy , uma de raio igual a 6 e centro no ponto $(6, 6)$ e outra de centro na origem e tangente exteriormente à primeira. A equação da tangente interior comum às circunferências é:

A () $y + 2x - 3(\sqrt{2} - 2) = 0$

B () $2y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

C () $y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

D () $y + x - 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

E () $2y + x - 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

Gabarito: C

A tangente comum no ponto de contato é perpendicular à reta que une os centros. O raio da circunferência menor determina as coordenadas desse ponto.

Etapa 1. Determine o raio da circunferência centrada na origem.

Sejam r esse raio e $R = 6$ o outro. A linha dos centros faz 45° com os eixos. Como as circunferências são tangentes exteriormente:

$$\begin{aligned}(r + 6) \cos 45^\circ &= 6, \\ r + 6 &= 6\sqrt{2}, \\ r &= 6(\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

Etapa 2. Localize o ponto de tangência.

O ponto de contato (x_0, y_0) pertence à reta $y = x$. Suas coordenadas são

$$\begin{aligned}x_0 = y_0 &= r \cos 45^\circ \\ &= 6(\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3(2 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Etapa 3. Escreva a equação da tangente.

A reta dos centros tem coeficiente angular 1, portanto a tangente tem coeficiente angular -1 :

$$\begin{aligned}y - y_0 &= -(x - x_0), \\ x + y &= x_0 + y_0 \\ &= 6(2 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Na forma apresentada nas alternativas:

$$y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0.$$

Questão 13

Considere uma barra AB de comprimento L fixada na posição vertical sobre um muro de altura $L/2$, que está assentado sobre um plano horizontal. Desprezando a altura do observador O , o ângulo máximo $\widehat{AOB}$ enquanto o observador O caminha sobre o plano horizontal é:

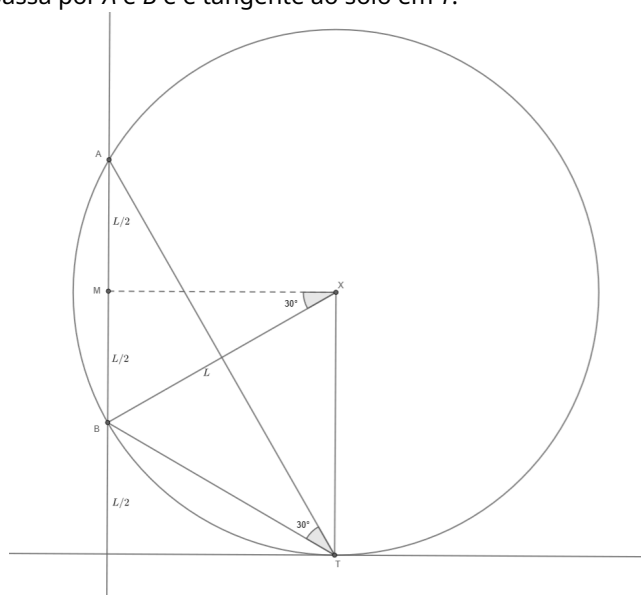
A () 30° B () 60° C () 75° D () 15° E () 45°

Gabarito: A

O ângulo máximo pode ser obtido pelo arco capaz tangente ao solo ou pela maximização da tangente do ângulo de visão. Os dois métodos são desenvolvidos a seguir.

Etapa 1. Solução 1: localize o ponto de maior ângulo.

Considere a circunferência que passa por A e B e é tangente ao solo em T .



Todo outro ponto do solo, no mesmo lado do muro que T , é externo à circunferência e vê o segmento AB sob um ângulo menor que $\angle ATB$. Portanto, o máximo ocorre em T .

Sejam X o centro e M sua projeção sobre AB . Como M é o ponto médio de AB , tem-se $MB = L/2$. A altura de X em relação ao solo é o raio R :

$$\begin{aligned} R &= MB + \frac{L}{2} \\ &= L. \end{aligned}$$

Etapa 2. Solução 1: calcule o ângulo máximo.

Pela relação entre os ângulos inscrito e central, $\angle ATB = \angle AXB/2 = \angle MXB$. No triângulo retângulo MBX :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle ATB &= \frac{MB}{XB} \\ &= \frac{L/2}{L} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $\angle ATB = 30^\circ$.

Etapa 3. Solução 2: expresse a tangente do ângulo de visão.

Seja P o pé do muro. Defina $\alpha = \angle AOP$, $\theta = \angle BOP$ e $PO = x > 0$. As alturas de A e B fornecem $\tan \alpha = 3L/(2x)$ e $\tan \theta = L/(2x)$. Aplicando a fórmula da tangente da diferença:

$$\begin{aligned}
 k &= \tan(\alpha - \theta) \\
 &= \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta} \\
 &= \frac{\frac{3L}{2x} - \frac{L}{2x}}{1 + \frac{3L^2}{4x^2}} \\
 &= \frac{4xL}{4x^2 + 3L^2}.
 \end{aligned}$$

Etapa 4. Solução 2: imponha a existência de uma distância real.

Reorganizando a expressão de k , obtém-se uma equação quadrática em x :

$$4kx^2 - 4Lx + 3kL^2 = 0.$$

Para haver solução real, o discriminante deve ser não negativo:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-4L)^2 - 4(4k)(3kL^2) \\
 &= 16L^2 - 48k^2L^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Assim, $k^2 \leq 1/3$. Como $0 < \alpha - \theta < 90^\circ$, o maior ângulo corresponde ao maior k positivo, atingido quando $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned}
 k_{\max} &= \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
 (\alpha - \theta)_{\max} &= \boxed{30^\circ}.
 \end{aligned}$$

Questão 14

Sejam α e β dois planos não paralelos que se interceptam na reta r e cujo ângulo diedro é $\pi/6$ radianos. Tome pontos A, B, C, D de α e, por cada um destes pontos, trace retas ortogonais a α que interceptam β nos pontos A', B', C', D' , respectivamente. Sabendo que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio cuja diagonal AC é paralela a r , a razão entre as áreas de $ABCD$ e $A'B'C'D'$ é:

A () 1

B () $3/2$

C () $\sqrt{3}/2$

D () $\sqrt{3}/3$

E () $1/3$

Gabarito: C

O quadrilátero $ABCD$ é a projeção ortogonal de $A'B'C'D'$ sobre o plano α . A razão das áreas é o cosseno do ângulo entre os planos.

Etapa 1. Aplique o teorema da projeção de áreas.

Sejam S_α e S_β as áreas de $ABCD$ e $A'B'C'D'$, respectivamente. Para o ângulo diedro dado:

$$\begin{aligned}
 \frac{S_\alpha}{S_\beta} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.
 \end{aligned}$$

Questão 15

Em uma escada, uma bola lançada do i -ésimo degrau irá parar em qualquer degrau mais baixo com probabilidade $1/i$. Por exemplo, ao lançarmos uma bola do 3º degrau, a bola tem $1/3$ de chances de parar no 2º degrau, $1/3$ de chances de parar no 1º degrau e $1/3$ de chances de parar no degrau 0. Nessa escada lançamos uma bola preta do degrau m , $m > 0$, e uma bola branca do degrau n , $n > m$. A probabilidade de a bola branca parar em um degrau mais baixo do que a bola preta é:

A () $\frac{m^2 - 2m + 1}{2n}$

B () $\frac{m^2 - 1}{2n}$

C () $\frac{m}{2n}$

D () $\frac{m^2}{2n}$

E () $\frac{m - 1}{2n}$

Gabarito: E

Fixando o degrau em que a bola branca para, contam-se as posições possíveis da bola preta acima dele. A soma desses casos forma uma PA.

Etapla 1. Conte os casos para cada posição da bola branca.

Se a branca para no degrau k , a preta precisa parar em um dos degraus de $k + 1$ a $m - 1$. Há $m - 1 - k$ possibilidades, cada uma com probabilidade $1/m$, enquanto a posição da branca tem probabilidade $1/n$.

Para $k = 0, 1, \dots, m - 2$, as quantidades favoráveis são $m - 1, m - 2, \dots, 1$. A partir de $k = m - 1$, não há caso favorável.

Etapla 2. Some as probabilidades.

Como os casos são mutuamente exclusivos:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{nm} [(m - 1) + (m - 2) + \dots + 1] \\ &= \frac{1}{nm} \cdot \frac{m(m - 1)}{2} \\ &= \frac{m - 1}{2n}. \end{aligned}$$

Para $m = 1$, a preta só pode parar no degrau 0, e a probabilidade é nula, como também indica a expressão.

GABARITO FÍSICA

Questão 16

Um projétil de chumbo está a uma temperatura de 175°C quando atinge uma parede e nela se aloja. Considere que 25% da energia cinética do projétil imediatamente antes da colisão permaneça nele como energia interna.

Dados:

- calor específico do chumbo: $125 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$;
- temperatura de fusão do chumbo: 327°C ;
- calor latente de fusão do chumbo: $26\,000 \text{ J/kg}$.

Se a energia interna que permanece após o projétil atingir a parede é justamente a mínima para que ocorra a fusão total do chumbo, a velocidade do projétil imediatamente antes da colisão, em m/s, é:

A () 30

B () 150

C () 400

D () 450

E () 600

Gabarito: E

A energia cinética retida aquece o chumbo até a temperatura de fusão e fornece o calor latente necessário para fundi-lo por completo.

Etapla 1. Escreva o balanço de energia.

Para um projétil de massa m , a energia retida é 25% da energia cinética inicial:

$$0,25 \frac{mv^2}{2} = mc\Delta T + mL.$$

A massa aparece em todos os termos e pode ser cancelada.

Etapla 2. Calcule a energia necessária por unidade de massa.

A variação de temperatura é $\Delta T = 152 \text{ K}$. O aquecimento e a fusão exigem

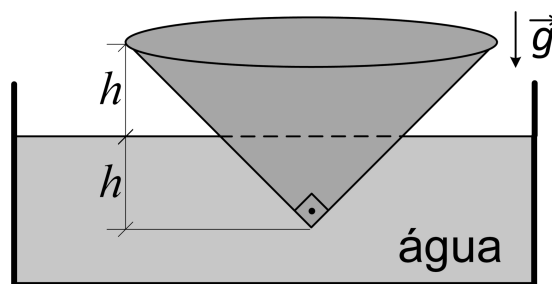
$$\begin{aligned} \frac{Q}{m} &= c\Delta T + L \\ &= \left(125 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right)(152 \text{ K}) + 26\,000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \\ &= 45\,000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}. \end{aligned}$$

Etapla 3. Determine a velocidade inicial.

Substituindo no balanço e isolando v :

$$\begin{aligned} \frac{0,25v^2}{2} &= 45\,000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}, \\ v^2 &= 360\,000 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}, \\ v &= \boxed{600 \frac{\text{m}}{\text{s}}}. \end{aligned}$$

Questão 17



Um recipiente vazio de formato cônico está parcialmente imerso na água e em equilíbrio, como geometria apresentada na figura. Insere-se no interior do recipiente uma partícula de massa $m = K\rho\pi h^3$, onde K é uma constante, ρ é a massa específica da água e h está indicado na figura. Após essa inserção, o recipiente sofre um pequeno deslocamento, afundando uma altura Δh .

Dado:

- aceleração da gravidade: g .

Observações:

- a espessura do recipiente é muito pequena;
- $\Delta h \ll h$;
- para $|a| \ll 1$, $(1 + a)^n \approx 1 + na$.

A altura Δh que o recipiente irá afundar até o novo ponto de equilíbrio é:

A () $Kh/3$

B () $Kh/6$

C () Kh

D () $3Kh$

E () $2Kh$

Gabarito: C

O peso da partícula é compensado pelo aumento do empuxo. A semelhança dos cones relaciona o volume submerso à profundidade.

Etapa 1. Expresse os volumes submersos.

O recipiente tem altura $2h$ e semiângulo de 45° , portanto seu raio superior é $2h$ e seu volume total é $V_{\text{total}} = 8\pi h^3/3$. Inicialmente, a altura submersa é h , e o volume submerso é $V_0 = \pi h^3/3$.

Após a inserção da partícula, a altura submersa passa a $h + \Delta h$. Pela semelhança:

$$\begin{aligned} V_f &= V_{\text{total}} \left(\frac{h + \Delta h}{2h} \right)^3 \\ &= \frac{\pi h^3}{3} \left(1 + \frac{\Delta h}{h} \right)^3. \end{aligned}$$

Etapa 2. Aplique o equilíbrio e a aproximação binomial.

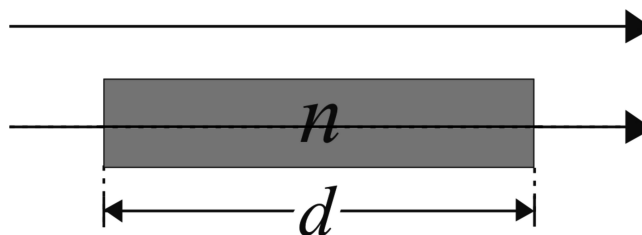
No equilíbrio inicial, a massa do recipiente é $M = \rho V_0$. No final, $\rho V_f = M + m$, com $m = K\rho\pi h^3$. Substituindo e dividindo por $\rho\pi h^3/3$:

$$\left(1 + \frac{\Delta h}{h} \right)^3 = 1 + 3K.$$

Como $\Delta h \ll h$, a aproximação fornecida permite escrever, em primeira ordem,

$$\begin{aligned} \frac{3\Delta h}{h} &= 3K, \\ \Delta h &= \boxed{Kh}. \end{aligned}$$

Questão 18



A figura mostra dois raios paralelos de luz que viajam em fase no vácuo até que um deles encontra uma película.

Dados:

- espessura da película: d ;
- índice de refração da película: n ;
- frequência dos raios de luz: f ;
- velocidade da luz no vácuo: c .

Observação:

- a medida de diferença de fase entre os raios tem como referência um plano ortogonal a eles.

A condição necessária e suficiente para que os raios continuem viajando em fase após o raio de baixo deixar a película é:

A () $\frac{(n^2 - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro ímpar

B () $\frac{(n^2 - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro par

C () $\frac{(n - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro

D () $\frac{2(n - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro ímpar

E () $\frac{2(n + 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro par

Gabarito: C

A diferença de caminhos ópticos deve ser um número inteiro de comprimentos de onda no vácuo para que os raios saiam em fase.

Etapa 1. Calcule a diferença de caminhos ópticos.

No trecho de espessura d , os caminhos ópticos são d no vácuo e nd na película. Sua diferença é

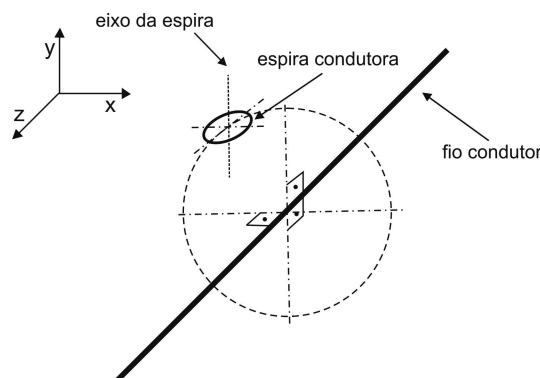
$$\begin{aligned}\Delta S &= nd - d \\ &= d(n - 1).\end{aligned}$$

Etapa 2. Imponha a igualdade de fase.

De $\Delta S = m\lambda_0$ e $\lambda_0 = c/f$, segue $d(n - 1) = mc/f$. Como m é inteiro:

$$\frac{(n - 1)df}{c} \in \mathbb{Z}.$$

Questão 19



O sistema da figura é montado com o objetivo de determinar a resistência elétrica de uma espira condutora de área A . O centro dessa espira descreve uma trajetória circular de raio R e período t , à velocidade angular constante, ao redor de um fio também condutor com uma corrente elétrica contínua I . A corrente elétrica na espira é medida e seu valor oscila harmonicamente entre $+i$ e $-i$.

Dados:

- área da espira: $A = 1 \text{ cm}^2$;
- raio da trajetória do centro da espira: $R = 10 \text{ cm}$;
- período da trajetória circular do centro da espira: $t = 2 \text{ s}$;
- corrente elétrica contínua do fio condutor: $I = 50 \text{ A}$;
- amplitude da corrente elétrica induzida medida na espira: $i = 1 \text{ mA}$;
- permeabilidade magnética no vácuo: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m/A}$.

Observações:

- o sistema segue a orientação dos eixos xyz desenhados na figura;
- o fio condutor é paralelo ao eixo z ;
- o eixo da espira está sempre paralelo ao eixo y ;
- o plano da espira é sempre paralelo ao plano xz ;
- o plano da trajetória do centro da espira é paralelo ao plano xy ;
- considere que as linhas de campo magnético que atravessam a espira estejam paralelas;
- para toda frequência f , considere $\frac{\Delta \text{sen}(2\pi ft)}{\Delta t} = 2\pi f \cos(2\pi ft)$.

A resistência da espira, em $\mu\Omega$, é:

A () 20π

B () $2,5\pi$

C () 4π

D () 5π

E () 10π

Gabarito: E

A rotação faz o fluxo magnético variar harmonicamente. A amplitude da força eletromotriz induzida, dividida pela amplitude da corrente, fornece a resistência da espira.

Etapa 1. Expresse o fluxo magnético e a força eletromotriz.

Seja θ o ângulo entre o eixo y e o raio que liga o centro da trajetória à espira. Denote por τ o tempo e por $T = 2 \text{ s}$ o período. Com uma escolha da origem de fase:

$$\begin{aligned}\theta &= 2\pi f\tau, \\ \phi(\tau) &= BA \text{sen}(2\pi f\tau).\end{aligned}$$

Pela lei de Faraday e pela relação de derivação dada:

$$|\varepsilon(\tau)| = \left| \frac{\Delta\phi}{\Delta\tau} \right| \\ = BA 2\pi f |\cos(2\pi f\tau)|.$$

Etapa 2. Relacione as amplitudes da tensão e da corrente.

Para a resistência r , a lei de Ohm fornece $\varepsilon_{\max} = r i_{\max}$. Como o máximo de $|\cos(2\pi f\tau)|$ é 1:

$$r i_{\max} = BA 2\pi f, \\ r = \frac{BA 2\pi f}{i_{\max}}.$$

Etapa 3. Substitua o campo do fio e os dados.

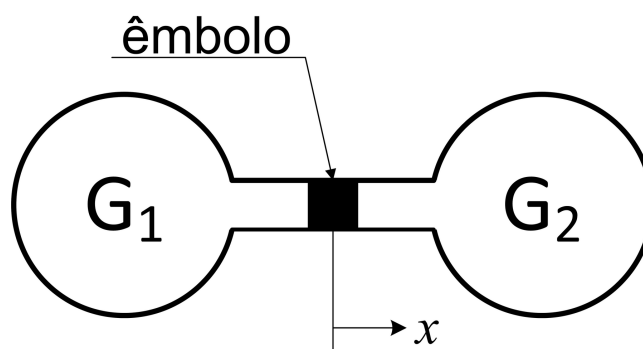
Usando $B = \mu I / (2\pi R)$ e $f = 1/T$, a resistência se reduz a

$$r = \frac{\mu I A}{RT i_{\max}}.$$

As conversões são $A = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $R = 0,1 \text{ m}$ e $i_{\max} = 1 \times 10^{-3} \text{ A}$. Substituindo em unidades do SI:

$$r = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7})(50)(10^{-4})}{(10^{-1})(2)(10^{-3})} \Omega \\ = 10\pi \mu\Omega.$$

Questão 20



Dois gases perfeitos, G_1 e G_2 , estão contidos em recipientes rígidos, separados por um êmbolo que se move sem atrito por um tubo longo de área de seção transversal S , conforme a figura. Cada um dos gases possui volume inicial V , a uma temperatura de 27°C . Considere a seguinte transformação isobárica do conjunto: a temperatura de G_1 aumenta 100°C e a de G_2 diminui 100°C . A expressão que representa o deslocamento x do êmbolo até o novo ponto de equilíbrio é:

A () $2V/(3S)$

B () $3V/(2S)$

C () $V/(2S)$

D () $V/(3S)$

E () $V/(6S)$

Gabarito: D

O gás aquecido se expande e desloca o êmbolo para a direita. As temperaturas absolutas e os volumes finais permitem calcular esse deslocamento.

Etapa 1. Escreva os volumes e as temperaturas finais.

Para um deslocamento x do êmbolo, o gás G_1 ganha o volume Sx e o gás G_2 perde o mesmo volume:

$$V_{1f} = V + Sx,$$

$$V_{2f} = V - Sx.$$

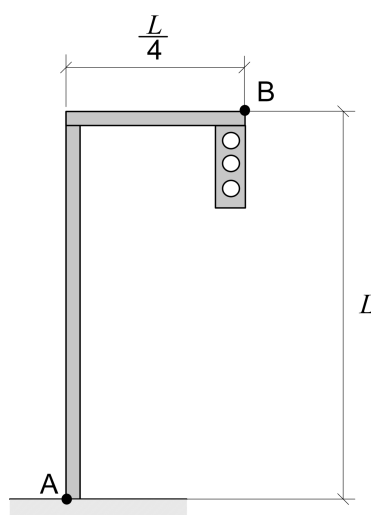
A temperatura inicial é 300 K. Após a transformação, $T_{1f} = 400$ K e $T_{2f} = 200$ K.

Etapla 2. Aplique a relação entre volume e temperatura.

Os gases têm inicialmente o mesmo volume, a mesma temperatura e a mesma pressão, portanto possuem a mesma quantidade de matéria. No equilíbrio final, suas pressões também são iguais:

$$\begin{aligned}\frac{V_{1f}}{T_{1f}} &= \frac{V_{2f}}{T_{2f}}, \\ \frac{V + Sx}{400 \text{ K}} &= \frac{V - Sx}{200 \text{ K}}, \\ V + Sx &= 2V - 2Sx, \\ 3Sx &= V, \\ x &= \boxed{\frac{V}{3S}}.\end{aligned}$$

Questão 21



Inicialmente, um poste, fabricado com material de coeficiente de dilatação volumétrica γ , tem as dimensões indicadas na figura, estando o ponto A fixo. Ao ser submetido a um aumento de temperatura T , o ponto B é deslocado de:

A () $\frac{\sqrt{17}\gamma TL}{4}$

B () $\frac{5\gamma TL}{12}$

C () $\frac{\sqrt{17}\gamma TL}{21}$

D () $\frac{\sqrt{17}\gamma TL}{12}$

E () $\frac{\gamma TL}{4}$

Gabarito: D

O deslocamento de B tem duas componentes perpendiculares, produzidas pelas dilatações das partes horizontal e vertical do poste.

Etapla 1. Calcule as componentes do deslocamento.

Seja α o coeficiente de dilatação linear. Como A está fixo e o aumento de temperatura é T :

$$\Delta S_x = \frac{L}{4} \alpha T,$$

$$\Delta S_y = L \alpha T.$$

Etapa 2. Determine o módulo do deslocamento.

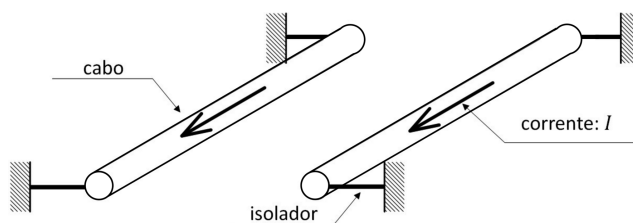
Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\Delta S_B &= \sqrt{(\Delta S_x)^2 + (\Delta S_y)^2} \\ &= LaT \sqrt{\frac{1}{16} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{17}LaT}{4}.\end{aligned}$$

Usando $a = \gamma/3$, obtém-se

$$\Delta S_B = \boxed{\frac{\sqrt{17}\gamma LT}{12}}.$$

Questão 22



Um sistema de distribuição em corrente contínua contém um circuito com 2 cabos condutores rígidos idênticos ligados em paralelo, fixados por isoladores de borracha e posicionados conforme mostra a figura.

Dados:

- distância entre os centros dos cabos: 5 cm;
- permeabilidade magnética do meio: $8\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$;
- força máxima admissível nos isoladores por unidade de área: $625 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$;
- comprimento de cada cabo: 10 m;
- área da seção transversal dos isoladores: 10 mm^2 .

Observação:

- use a aproximação de fios infinitos para o cálculo dos campos magnéticos.

A máxima corrente do circuito I , em A, que pode circular simultaneamente em cada um dos cabos, sem o rompimento dos isoladores, é:

A () $625/\sqrt{2}$

B () 625

C () $625\sqrt{3}$

D () 1250

E () 2500

Gabarito: D

A força magnética entre os cabos é suportada pelos dois isoladores de cada cabo. A corrente máxima é obtida igualando essa força ao limite total dos apoios.

Etapa 1. Expresse a força magnética em função da corrente.

O campo produzido por um cabo à distância d é $B = \mu I / (2\pi d)$. A força sobre o outro cabo, de comprimento L , é

$$F_{\text{mag}} = BIL$$

$$= \frac{\mu L I^2}{2\pi d}.$$

Convertendo $d = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ e substituindo os dados em unidades do SI, o coeficiente de I^2 vale

$$\frac{\mu L}{2\pi d} = \frac{(8\pi \cdot 10^{-7})(10)}{2\pi(5 \cdot 10^{-2})} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$= 8 \times 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}.$$

Etapla 2. Calcule a força admissível em cada isolador.

A área de cada seção é $10 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2$. Multiplicando a tensão mecânica máxima pela área:

$$F_{\text{isolador}} = \sigma_{\text{max}} A$$

$$= (6,25 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})(1 \times 10^{-5} \text{ m}^2)$$

$$= 62,5 \text{ N}.$$

Etapla 3. Determine a corrente máxima.

Os dois isoladores de cada cabo suportam juntos 125 N. No limite:

$$(8 \times 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}) I^2 = 125 \text{ N},$$

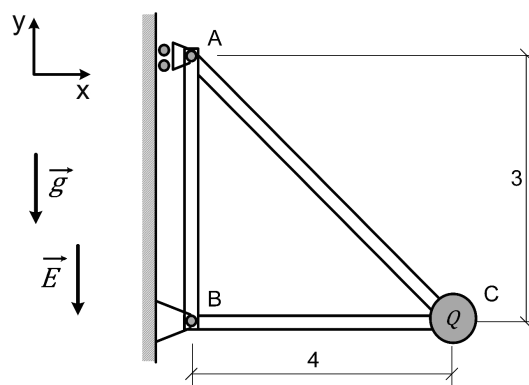
$$I^2 = \frac{125 \text{ N}}{8 \times 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}}$$

$$= 1\,562\,500 \text{ A}^2,$$

$$I = \boxed{1250 \text{ A}}.$$



Questão 23



A figura apresenta uma estrutura formada pelas barras AB, BC e CA. Essa estrutura está apoiada na parede vertical nos pontos A e B. O apoio A permite reações apenas na direção do eixo x, enquanto o apoio B permite reações nas direções dos eixos x e y. Na extremidade C da estrutura está posicionada uma partícula de carga Q e massa M . A estrutura está em uma região do espaço submetida a um campo elétrico vertical de módulo E e sentido de cima para baixo.

Dados:

- comprimento da barra BC: 4 m;
- comprimento da barra AB: 3 m;
- massa da barra BC: 2,5 kg;
- massa da partícula: $M = 0,3$ kg;
- carga da partícula: $Q = -5$ C;
- intensidade do campo elétrico: 4,6 N/C;
- aceleração da gravidade: $g = 10$ m/s².

Observações:

- os apoios não admitem torque;
- as massas das barras AB e AC são desprezíveis;
- a distribuição de massa da barra BC é uniforme.

O módulo da reação no apoio A, em N, é aproximadamente:

A () 10

B () 17

C () 19

D () 21

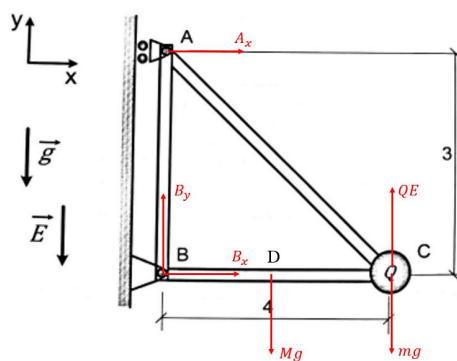
E () 23

Gabarito: A

O equilíbrio de torques em torno de B elimina as reações desse apoio e permite calcular diretamente a reação horizontal em A.

Etapa 1. Identifique as forças verticais.

O diagrama da resolução representa os pesos da barra e da partícula e a força elétrica:



Na figura, os rótulos Mg e mg indicam os pesos da barra e da partícula, respectivamente. Para evitar confusão com a massa M do enunciado, esses pesos serão denotados por P_b e P_p .

Como a carga é negativa e o campo aponta para baixo, a força elétrica aponta para cima. Os módulos são

$$\begin{aligned} P_b &= (2,5 \text{ kg})\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \\ &= 25 \text{ N}, \\ P_p &= (0,3 \text{ kg})\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \\ &= 3 \text{ N}, \\ F_e &= |Q|E \\ &= (5 \text{ C})\left(4,6 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \\ &= 23 \text{ N}. \end{aligned}$$

Etapla 2. Equilibre os torques em torno de B .

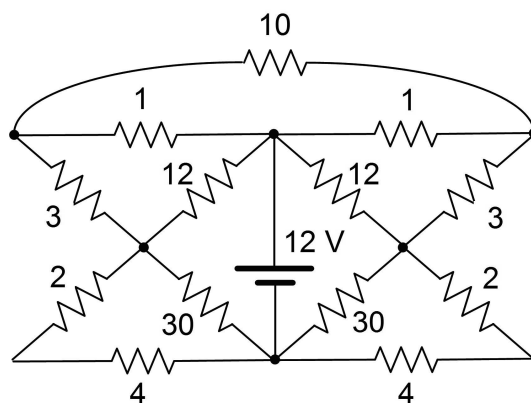
Os braços de alavanca são 3 m para A_x , 2 m para o peso da barra e 4 m para as forças aplicadas em C . Assim,

$$A_x(3 \text{ m}) + P_b(2 \text{ m}) = (F_e - P_p)(4 \text{ m}).$$

Substituindo e isolando a reação:

$$\begin{aligned} A_x(3 \text{ m}) &= (20 \text{ N})(4 \text{ m}) - (25 \text{ N})(2 \text{ m}) \\ &= 30 \text{ N m}, \\ A_x &= \boxed{10 \text{ N}}. \end{aligned}$$

Questão 24



No circuito da figura, os valores de resistência apresentados encontram-se em Ω . A potência, em W, fornecida pela fonte é:

A () 18

B () 36

C () 54

D () 72

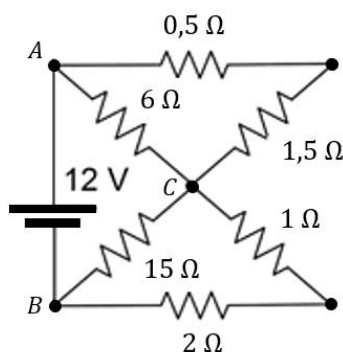
E () 96

Gabarito: B

A simetria do circuito permite retirar o resistor entre pontos equipotenciais. As associações restantes fornecem a resistência equivalente e a potência da fonte.

Etapla 1. Use a simetria para reduzir o circuito.

Os terminais do resistor de 10Ω têm o mesmo potencial, de modo que não passa corrente por ele. As associações em série dos ramos restantes levam ao circuito abaixo:



Etapla 2. Calcule as resistências entre A, C e B.

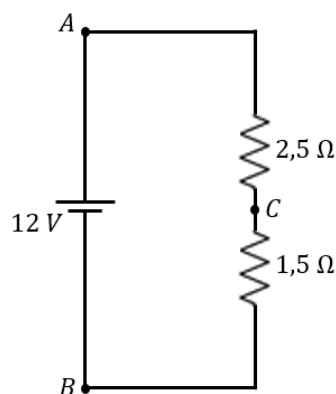
Entre A e C, as resistências de 6Ω e 2Ω estão em paralelo:

$$R_{AC} = \frac{(6\Omega)(2\Omega)}{6\Omega + 2\Omega} = 1,5\Omega.$$

Entre C e B, o paralelo é de 15Ω com 3Ω :

$$R_{CB} = \frac{(15\Omega)(3\Omega)}{15\Omega + 3\Omega} = 2,5\Omega.$$

A nova redução é



Etapas 3. Calcule a potência fornecida pela fonte.

As duas resistências equivalentes estão em série:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq}} &= R_{AC} + R_{CB} \\ &= 1,5 \, \Omega + 2,5 \, \Omega \\ &= 4 \, \Omega. \end{aligned}$$

Para a tensão de 12 V:

$$\begin{aligned} P &= \frac{U^2}{R_{\text{eq}}} \\ &= \frac{(12 \, \text{V})^2}{4 \, \Omega} \\ &= \boxed{36 \, \text{W}}. \end{aligned}$$

Questão 25

Um satélite artificial move-se por uma órbita aproximadamente circular estável em torno de um planeta. Posteriormente, o satélite acelera até a velocidade de escape do campo gravitacional em que se encontra devido ao impulso recebido pela ejeção de gases.

Dados:

- constante universal da gravitação: G ;
- raio da órbita circular estável original do satélite: r ;
- massa do planeta: M ;
- $\sqrt{2} \approx 1,41$.

A diferença entre o módulo da velocidade de escape do satélite e o módulo da sua velocidade na órbita estável original é de aproximadamente:

A () $0,59\sqrt{GM/r}$
 B () $1,41\sqrt{GM/r}$
 C () $0,41\sqrt{GM/r}$
 D () $2,41\sqrt{GM/r}$
 E () $2,82\sqrt{GM/r}$

Gabarito: C

A velocidade orbital vem do equilíbrio entre a força gravitacional e a resultante centrípeta. A velocidade de escape é obtida pela conservação da energia mecânica.

Etapas 1. Determine a velocidade na órbita circular.

Para um satélite de massa m na órbita de raio r :

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

$$v^2 = \frac{GM}{r},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Etapla 2. Determine a velocidade de escape.

No caso limite de escape, a velocidade e a energia potencial tendem a zero no infinito. Após o impulso, a conservação da energia fornece

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{mv_e^2}{2} = 0,$$

$$v_e^2 = \frac{2GM}{r},$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Etapla 3. Calcule a diferença entre os módulos.

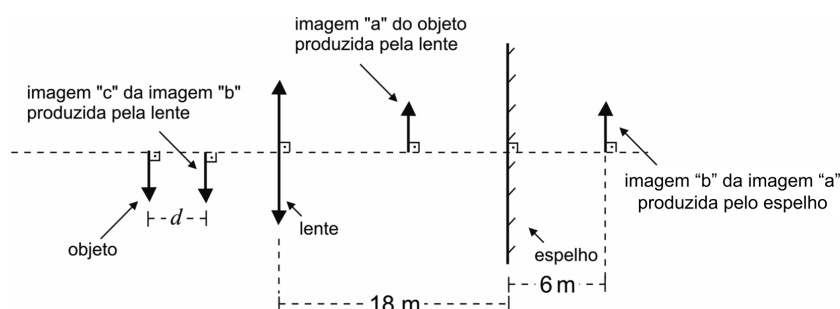
Subtraindo as velocidades:

$$\Delta v = v_e - v$$

$$= (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\approx 0,41\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Questão 26



Um objeto encontra-se sobre o eixo central de uma lente convergente delgada, em algum ponto à esquerda da lente. A imagem desse objeto produzida pela lente está indicada na figura como imagem "a". Um espelho plano reflete a imagem "a", produzindo uma imagem "b". Por sua vez, a imagem "b", ao passar de volta pela lente, produz a imagem "c".

Dado:

- distância focal da lente (em ambos os lados da lente): 4 m.

A distância d , indicada na figura, entre o objeto e a imagem "c" final, em centímetros, é:

A () 80

B () 120

C () 180

D () 480

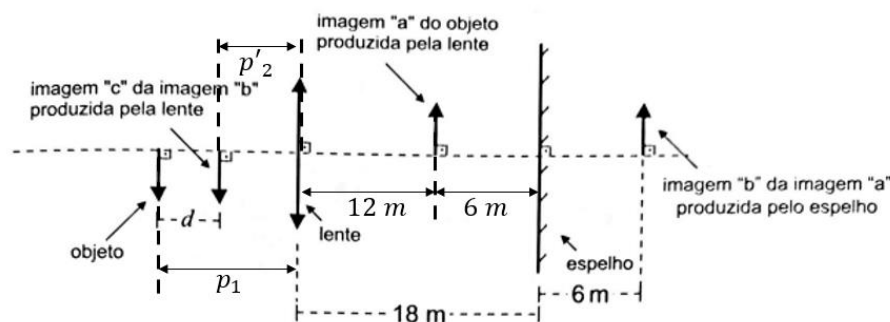
E () 600

Gabarito: B

A equação da lente determina as posições do objeto e da imagem final. A diferença dessas posições fornece d .

Etapas 1. Calcule as posições nas duas passagens pela lente.

O esquema mostra a imagem a a 12 m da lente e sua reflexão b a 24 m:



Na primeira passagem, a relação $f = pp'/(p + p')$, com $f = 4$ m, fornece

$$4 \text{ m} = \frac{p_1(12 \text{ m})}{p_1 + 12 \text{ m}},$$

$$p_1 = 6 \text{ m}.$$

Na volta, b atua como objeto a 24 m da lente:

$$4 \text{ m} = \frac{(24 \text{ m})p'_2}{24 \text{ m} + p'_2},$$

$$p'_2 = 4,8 \text{ m}.$$

Etapas 2. Calcule a distância entre o objeto e a imagem final.

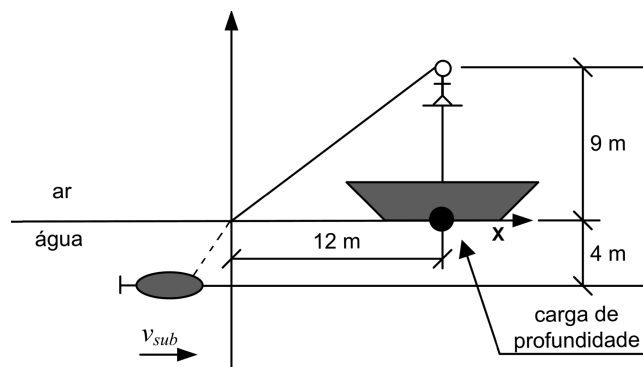
Ambos estão à esquerda da lente, portanto $d = p_1 - p'_2$:

$$d = 6 \text{ m} - 4,8 \text{ m}$$

$$= 1,2 \text{ m}$$

$$= \boxed{120 \text{ cm}}.$$

Questão 27



Um navio de guerra encontra-se parado com um marinheiro de vigia em um posto de observação 9 m acima do nível do mar. Em um determinado instante, esse marinheiro avista um submarino aproximando-se na direção do eixo x , à velocidade constante e a 4 m de profundidade, conforme ilustra a figura. No instante em que o submarino é avistado, uma carga de profundidade é liberada do navio e, depois de um certo tempo, o submarino é destruído ao ser atingido pela carga de profundidade.

Dados:

- velocidade inicial da carga de profundidade: 0 m/s;
- aceleração da gravidade: 10 m/s^2 ;
- volume da carga de profundidade: $0,001 \text{ m}^3$;
- massa específica da água: 1000 kg/m^3 ;
- massa da carga de profundidade: 1,8 kg;
- índice de refração do ar: 1;
- índice de refração da água: $4/3$.

Observação:

- considere constante o empuxo sobre a carga de profundidade.

Diante do exposto, a velocidade do submarino, em m/s, era de:

A () $5\sqrt{5}$

B () $5\sqrt{3}$

C () $6\sqrt{5}$

D () $6\sqrt{3}$

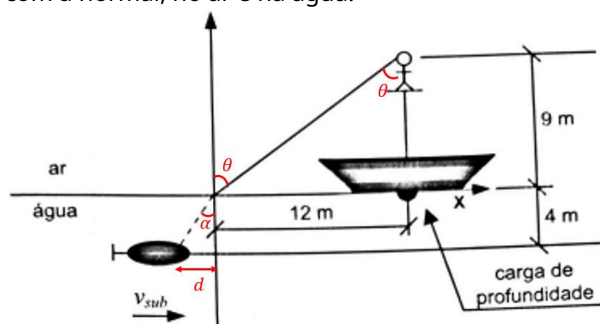
E () $4\sqrt{3}$

Gabarito: A

A refração localiza o submarino. O tempo de descida da carga, calculado com o empuxo, determina sua velocidade.

Etapla 1. Use a lei de Snell para localizar o submarino.

No esquema, θ e α são os ângulos com a normal, no ar e na água:



O trecho no ar forma um triângulo de catetos 12 m e 9 m. Pela lei de Snell:

$$n_{\text{ar}} \sin \theta = n_{\text{água}} \sin \alpha,$$

$$\frac{12}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = \frac{4}{3} \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

Se d é a distância horizontal entre o ponto de refração e o submarino, a profundidade de 4 m fornece

$$\frac{d}{\sqrt{d^2 + (4 \text{ m})^2}} = \frac{3}{5},$$

$$d = 3 \text{ m}.$$

Etapla 2. Calcule a aceleração da carga na água.

Tomando o sentido descendente como positivo, a resultante do peso e do empuxo é $ma = mg - \rho g V$. Substituindo os dados em unidades do SI:

$$a = g - \frac{\rho g V}{m}$$

$$= \left[10 - \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,001}{1,8} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$= \frac{40}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Etapla 3. Determine o tempo de descida e a velocidade do submarino.

A carga parte do repouso e percorre 4 m com aceleração constante:

$$\frac{at^2}{2} = 4 \text{ m},$$

$$t^2 = \frac{2(4 \text{ m})}{\frac{40}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$= \frac{9}{5} \text{ s}^2,$$

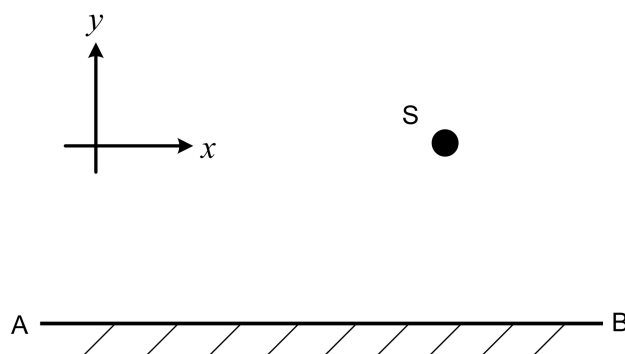
$$t = \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ s}.$$

Nesse tempo, o submarino percorre $12 \text{ m} + d = 15 \text{ m}$ até a carga. Logo,

$$v = \frac{15 \text{ m}}{\frac{3}{\sqrt{5}} \text{ s}}$$

$$= \boxed{5\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

Questão 28



Na figura, uma partícula S e os pontos extremos A e B de um espelho plano movem-se no plano xy de acordo com as seguintes equações paramétricas para as coordenadas (em metros) em função do instante $t > 0$ (em segundos):

$$\begin{cases} x_A(t) = 5 + t \\ y_A(t) = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_B(t) = 10 + t \\ y_B(t) = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_S(t) = \sin(t) \\ y_S(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Observação:

- o plano do espelho é ortogonal ao plano xy.

A maior velocidade escalar atingida pela imagem da partícula no espelho, em m/s, é:

A () 3

B () $\sqrt{17}$

C () $2(1 + \sqrt{5})$

D () 5

E () $2\sqrt{5}$

Gabarito: D

A reflexão fornece a posição da imagem. Suas derivadas determinam a velocidade e permitem maximizar seu módulo.

Etapa 1. Determine a posição e a velocidade da imagem.

Como A e B têm o mesmo y, o espelho permanece paralelo ao plano xz, em $y_e = -5 - 2t$. A reflexão mantém $x_i = x_s$ e fornece $y_i = 2y_e - y_s$. Em metros:

$$\begin{aligned} x_i &= \sin t, \\ y_i &= -10 - 4t - \cos t. \end{aligned}$$

Derivando, obtêm-se $v_{ix} = \cos t$ e $v_{iy} = -4 + \sin t$, em $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Etapa 2. Calcule e maximize a velocidade escalar.

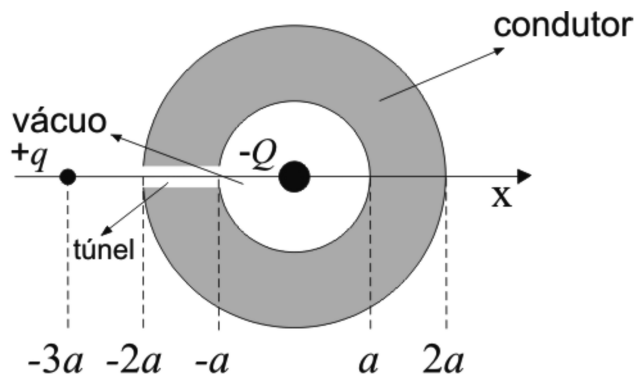
O módulo da velocidade é

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{\cos^2 t + (-4 + \sin t)^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= \sqrt{17 - 8 \sin t} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

O máximo ocorre quando $\sin t = -1$, possível para $t > 0$:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{17 + 8} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= \boxed{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}. \end{aligned}$$

Questão 29



O arranjo da figura é composto por uma casca esférica condutora oca de espessura a com uma partícula de carga negativa fixada em seu centro. A casca possui um túnel muito estreito em torno do eixo x , por onde uma partícula de carga positiva, inicialmente em repouso, pode atravessá-la.

Dados:

- massa da partícula de carga positiva: m ;
- carga da partícula positiva: $+q$;
- carga da partícula negativa: $-Q$;
- constante eletrostática do meio não condutor (vácuo): k ;
- raio interno da casca condutora: a ;
- raio externo da casca condutora: $2a$;
- posição inicial da partícula positiva: $x = -3a$;
- posição da partícula negativa: fixa em $x = 0$.

Observações:

- $|q| \ll |Q|$;
- a carga da partícula positiva é pequena o suficiente para não afetar o equilíbrio eletrostático na casca esférica condutora;
- despreze qualquer concentração de cargas nas paredes do túnel;
- o eixo x passa pelo centro da casca;
- a casca condutora está fixa e com carga total nula.

Ao ser liberada do repouso, a partícula positiva atinge a velocidade v em $x = -a$. Pode-se afirmar que v^2 é:

A () $\frac{kqQ}{2am}$

B () $\frac{kqQ}{3am}$

C () $\frac{4kqQ}{3am}$

D () $\frac{3kqQ}{2am}$

E () $\frac{kqQ}{am}$

Gabarito: B

A carga central induz cargas nas duas superfícies da casca. A diferença de potencial entre as posições inicial e final determina o ganho de energia cinética.

Etapla 1. Identifique as cargas induzidas.

A carga $-Q$ no centro induz $+Q$ na superfície interna. Como a casca é neutra, sua superfície externa fica com carga $-Q$. O potencial em cada ponto é a soma das contribuições dessas duas superfícies e da carga central.

Etapla 2. Calcule os potenciais inicial e final.

Em $x = -3a$, o ponto está fora das duas superfícies. As três contribuições usam a distância $3a$:

$$\begin{aligned} V_i &= -\frac{kQ}{3a} + \frac{kQ}{3a} - \frac{kQ}{3a} \\ &= -\frac{kQ}{3a}. \end{aligned}$$

Em $x = -a$, as contribuições da carga central e da superfície interna se cancelam. O potencial produzido pela superfície externa é constante em seu interior e depende de seu raio $2a$:

$$\begin{aligned} V_f &= -\frac{kQ}{a} + \frac{kQ}{a} - \frac{kQ}{2a} \\ &= -\frac{kQ}{2a}. \end{aligned}$$

Etapla 3. Aplique a conservação da energia mecânica.

A partícula parte do repouso. O trabalho da força elétrica é o aumento de sua energia cinética:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= q(V_i - V_f) \\ &= q\left(-\frac{kQ}{3a} + \frac{kQ}{2a}\right) \\ &= \frac{kQq}{6a}, \\ v^2 &= \boxed{\frac{kQq}{3am}}. \end{aligned}$$

Questão 30

A espaçonave CEOS passa pelo corpo celeste Al-Quds com velocidade relativa de $0,6c$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. No instante em que CEOS e Al-Quds estão alinhados, os relógios do comandante da espaçonave (t_{CEOS}) e de um observador situado em Al-Quds (t_{QUDS}) são sincronizados e zerados. A espaçonave emite uma luz muito intensa no instante em que o comandante da espaçonave marca $t_{CEOS} = 4$ s após sua passagem por Al-Quds.

Dado:

- $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Observação:

- admita o corpo celeste Al-Quds como sendo um referencial inercial e que a espaçonave se movimenta sempre em linha reta.

Tomando como referencial o observador em Al-Quds, o instante t_{QUDS} do início da emissão da luz pela CEOS e a distância percorrida pela CEOS desde a passagem por Al-Quds até esse instante são, respectivamente:

- A** () 3,2 s e $7,2 \times 10^8$ m **B** () 3,2 s e $12,0 \times 10^8$ m **C** () 5,0 s e $11,25 \times 10^8$ m
D () 5,0 s e $7,2 \times 10^8$ m **E** () 5,0 s e $9,0 \times 10^8$ m

Gabarito: E

O relógio da nave mede o tempo próprio entre a passagem por Al-Quds e a emissão. O fator de Lorentz relaciona esse intervalo ao tempo e ao deslocamento medidos em Al-Quds.

Etapla 1. Calcule o fator de Lorentz.

Para a velocidade relativa $v = 0,6c$:



$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (0,6)^2}} \\ &= \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

O fator γ é adimensional.

Etapla 2. Determine o instante da emissão em Al-Quds.

Os dois eventos ocorrem no mesmo ponto da nave, portanto $\Delta\tau = 4\text{ s}$ é o tempo próprio. Como os relógios foram zerados na passagem:

$$\begin{aligned}t_{\text{QUDS}} &= \gamma\Delta\tau \\ &= \frac{5}{4}(4\text{ s}) \\ &= \boxed{5,0\text{ s}}.\end{aligned}$$

Etapla 3. Calcule o deslocamento da nave.

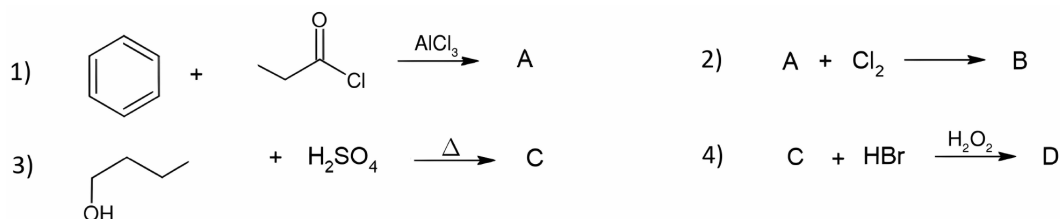
Entre os eventos, a transformação de Lorentz para o deslocamento dá $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta\tau)$. No referencial da nave, $\Delta x' = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}d_{\text{QUDS}} &= \gamma v\Delta\tau \\ &= \frac{5}{4}(0,6)(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})(4\text{ s}) \\ &= \boxed{9,0 \times 10^8 \text{ m}}.\end{aligned}$$

GABARITO QUÍMICA

Questão 31

Considere as reações na sequência abaixo:



Sabendo que A, B, C e D representam os compostos orgânicos formados majoritariamente em cada uma das reações, a alternativa que contém as nomenclaturas viáveis para cada um desses compostos, respectivamente, é:

- A () 1-fenilpropan-1-ona; 1-(3-clorofenil)propan-1-ona; but-1-eno; 1-bromo-butano
 B () 1-fenilpropan-2-ona; 1-(4-clorofenil)propan-2-ona; but-2-eno; 1-bromo-butano
 C () 1-fenilpropan-1-ona; 1-(3-clorofenil)propan-1-ona; but-1-eno; 2-bromo-butano
 D () 1-fenilpropan-2-ona; 1-(4-clorofenil)propan-2-ona; but-1-eno; 2-bromo-butano
 E () 1-fenilpropan-1-ona; 3-(3-clorofenil)propan-2-ona; but-2-eno; 2-bromo-butano

Gabarito: A

As quatro reações envolvem, em sequência, acilação aromática, cloração, desidratação de álcool e adição radicalar de HBr. Cada transformação identifica um dos produtos pedidos.

Etapla 1. Reação 1: identifique A pela acilação de Friedel-Crafts.

O cloreto de propanoíla, na presença de $AlCl_3$, introduz o grupo $-COCH_2CH_3$ no benzeno. O produto tem estrutura $C_6H_5-CO-CH_2CH_3$:

A: 1-fenilpropan-1-ona.

Etapla 2. Reação 2: identifique B pela cloração em meta.

Considerando a cloração do anel aromático, o grupo acila é desativante e orienta a substituição para a posição meta. O cloro ocupa a posição 3 em relação ao grupo acila:

B: 1-(3-clorofenil)propan-1-ona.

Etapla 3. Reação 3: identifique C pela desidratação do álcool.

A desidratação intramolecular do butan-1-ol elimina água e forma a dupla ligação entre os carbonos 1 e 2. O produto é $CH_2=CHCH_2CH_3$:

C: but-1-eno.

Etapla 4. Reação 4: identifique D pelo efeito peróxido.

Na presença de H_2O_2 , a adição de HBr ao but-1-eno segue a orientação anti-Markovnikov. O bromo se liga ao carbono terminal, formando $BrCH_2CH_2CH_2CH_3$:

D: 1-bromobutano.

A sequência corresponde à alternativa A.

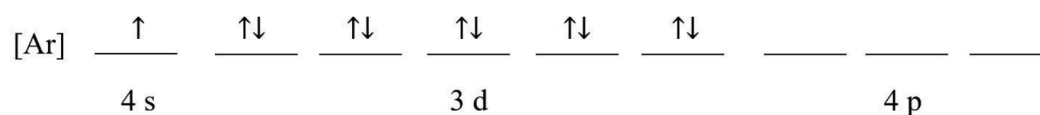


Questão 32

Considere o esboço parcial da Tabela Periódica representado abaixo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Sabe-se que um cátion trivalente apresenta o seguinte diagrama de preenchimento orbital:



O elemento químico correspondente a esse cátion é o:

A () Al

B () Cu

C () Ni

D () Ge

E () Se

Gabarito: D

A contagem dos elétrons do cátion, somada à sua carga positiva, fornece o número atômico do elemento.

Etapa 1. Conte os elétrons do cátion.

O núcleo eletrônico [Ar] contém 18 elétrons. O diagrama acrescenta um elétron em 4s e dez em 3d:

$$\begin{aligned} N_e &= 18 + 1 + 10 \\ &= 29. \end{aligned}$$

Etapa 2. Determine o número atômico e identifique o elemento.

O cátion trivalente tem três elétrons a menos que o átomo neutro:

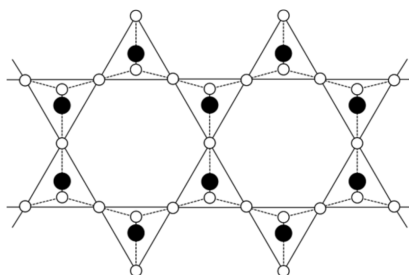
$$\begin{aligned} Z &= N_e + 3 \\ &= 32. \end{aligned}$$

O elemento de número atômico 32 é o germânio, do grupo 14 e do quarto período:

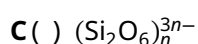
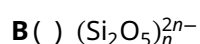
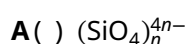
Ge.

Questão 33

“Amianto” é o nome genérico de muitos minerais fibrosos de silicatos. O amianto mais importante, o crisótilo, é um silicato de magnésio hidratado. O íon silicato do crisótilo é estruturado como linha dupla de tetraedros formados por átomos de Silício (círculos pretos) e de Oxigênio (círculos brancos), como representado na figura abaixo.



Diante do exposto, a composição geral do íon silicato do crisótilo é:



Gabarito: B

A fórmula do silicato é obtida contando os oxigênios que pertencem a cada tetraedro e considerando o compartilhamento entre tetraedros vizinhos.

Etapa 1. Conte os oxigênios por átomo de silício.

Na estrutura considerada, cada tetraedro tem um oxigênio não compartilhado e três oxigênios compartilhados com outros tetraedros. Cada oxigênio compartilhado contribui com metade de um átomo para a contagem:

$$\frac{N_{\text{O}}}{N_{\text{Si}}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

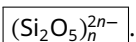
Multiplicando a proporção por 2, obtém-se a unidade Si_2O_5 .

Etapa 2. Determine a carga e a composição geral.

Com silício em número de oxidação +4 e oxigênio em -2, a carga da unidade, em unidades de carga elementar, é

$$z = 2(+4) + 5(-2) = -2.$$

Para n unidades, a composição geral é





Questão 34

Um drone submarino estava navegando a 90 m de profundidade e a uma pressão de 10 atm, quando o casco sofreu uma avaria. Para trazê-lo à superfície, foi acionado um dispositivo de emergência, que produz hidrogênio por uma célula eletroquímica contendo 2 L de solução aquosa de H_2SO_4 com concentração 2 mol/L. A eletrólise foi encerrada quando o drone atingiu a superfície. Nesse momento, o restante da solução aquosa de H_2SO_4 foi analisado nas CNTP, tendo sido verificado que sua concentração era de 8 mol/L.

A única alternativa correta é:

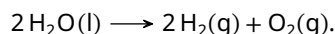
- A** () A uma pressão de 10 atm, o catodo passou a agir como anodo e o anodo como catodo.
- B** () A estrutura interna do drone sofreu avarias, porque o H_2SO_4 decomposto no anodo gerou vapores corrosivos.
- C** () O volume de H_2O consumido foi de 1,5 L.
- D** () A massa de H_2SO_4 restante foi de 49 g.
- E** () O volume da solução aquosa de H_2SO_4 reduziu para 75% do seu valor inicial.

Gabarito: C

A eletrólise consome água, enquanto a quantidade de ácido sulfúrico permanece constante. O aumento da concentração permite calcular a redução do volume da solução.

Etapla 1. Identifique a transformação eletrolítica.

Na eletrólise da água em meio ácido, a reação global é



O H_2SO_4 atua como eletrólito e sua quantidade de matéria não é alterada pela reação global.

Etapla 2. Calcule o volume final da solução.

Pela conservação da quantidade de ácido:

$$\begin{aligned} C_1 V_1 &= C_2 V_2, \\ V_2 &= \frac{C_1 V_1}{C_2} \\ &= \frac{(2 \frac{\text{mol}}{\text{L}})(2 \text{ L})}{8 \frac{\text{mol}}{\text{L}}} \\ &= 0,5 \text{ L}. \end{aligned}$$

Etapla 3. Determine o volume de água consumido.

Na aproximação adotada na questão, a diminuição do volume da solução corresponde ao volume de água consumido:

$$\begin{aligned} V_{\text{consumido}} &= V_1 - V_2 \\ &= 2 \text{ L} - 0,5 \text{ L} \\ &= \boxed{1,5 \text{ L}}. \end{aligned}$$

Esse resultado corresponde à alternativa C.

**Questão 35**

Com relação aos compostos de interesse bioquímico abaixo, a alternativa INCORRETA é:

- A ()** Dentre os compostos timina, prolina, ácido aspártico e lisina, a timina é o único composto que não forma ligação peptídica.
- B ()** Os aminoácidos são anfóteros, podendo doar ou receber prótons (H^+) de acordo com o conceito ácido base de Brönsted-Lowry.
- C ()** O RNA tem em sua estrutura diferentes combinações dos nucleotídeos formados pelas bases nitrogenadas púricas adenina e guanina e pelas bases nitrogenadas pirimidínicas uracila e citosina.
- D ()** Os aminoácidos sintetizados em quantidade suficiente pelo sistema metabólico de certos organismos vivos são denominados não essenciais.
- E ()** Os aminoácidos valina e glicina são constituintes das proteínas, opticamente ativos e formam ligações peptídicas.

Gabarito: E

A análise das funções dos aminoácidos, das bases do RNA e da estrutura da glicina permite identificar a única afirmação incorreta.

Etapas 1. Alternativa A: correta.

Prolina, ácido aspártico e lisina são aminoácidos e participam da formação de ligações peptídicas. A timina é uma base nitrogenada, sem essa função na formação de proteínas.

Etapas 2. Alternativa B: correta.

Os aminoácidos podem doar prótons pelo grupo carboxila e receber prótons pelo grupo amino. Esse comportamento caracteriza seu caráter anfótero segundo Brönsted-Lowry.

Etapas 3. Alternativa C: correta.

O RNA contém nucleotídeos com as bases púricas adenina e guanina e com as bases pirimidínicas uracila e citosina.

Etapas 4. Alternativa D: correta.

Os aminoácidos não essenciais são sintetizados pelo organismo em quantidade suficiente para suas necessidades. Os essenciais precisam ser obtidos pela alimentação, pois sua síntese é ausente ou insuficiente.

Etapas 5. Alternativa E: incorreta.

A glicina, H_2N-CH_2-COOH , tem dois hidrogênios ligados ao carbono central. Esse carbono não é estereogênico, e a glicina não apresenta atividade óptica, embora participe da formação de ligações peptídicas. Portanto, a alternativa pedida é **E**.

Questão 36

Considere cinco recipientes rígidos com o mesmo volume interno, nos quais são admitidas amostras de gases que são mantidas nas condições especificadas em cada opção abaixo. Levando em conta o comportamento de gases ideais, a alternativa que corresponde à maior pressão é:

- A () 16 g de metano nas CNTP.
 B () 8 g de oxigênio e 14,48 g de ar atmosférico a 0 °C.
 C () 7 g de dióxido de carbono e 7 g de nitrogênio a 20 °C.
 D () 8 g de oxigênio e 14 g de nitrogênio a 20 °C.
 E () 13,6 g de amônia a 72 °C.

Gabarito: E

Como os recipientes têm o mesmo volume, comparar as pressões equivale a comparar $PV = nRT$. Será usado $R = 0,082 \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}}$, com as temperaturas em kelvin.

Etapa 1. Calcule PV para a alternativa A.

O metano tem massa molar $16 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ e está a 273 K. A quantidade de matéria e o produto PV são

$$\begin{aligned} n_A &= \frac{16 \text{ g}}{16 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \\ &= 1 \text{ mol}, \\ P_A V &= (1 \cdot 0,082 \cdot 273) \text{ atm L} \\ &\approx 22,39 \text{ atm L}. \end{aligned}$$

Etapa 2. Calcule PV para a alternativa B.

A mistura está a 273 K. Com $M_{\text{O}_2} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ e massa molar média do ar de $29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$:

$$\begin{aligned} n_B &= \frac{8 \text{ g}}{32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} + \frac{14,48 \text{ g}}{29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \\ &\approx 0,7493 \text{ mol}, \\ P_B V &\approx (0,7493 \cdot 0,082 \cdot 273) \text{ atm L} \\ &\approx 16,77 \text{ atm L}. \end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule PV para a alternativa C.

A mistura está a 293 K. As massas molares de CO_2 e N_2 são $44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ e $28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$:

$$\begin{aligned} n_C &= \frac{7 \text{ g}}{44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} + \frac{7 \text{ g}}{28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \\ &\approx 0,4091 \text{ mol}, \\ P_C V &\approx (0,4091 \cdot 0,082 \cdot 293) \text{ atm L} \\ &\approx 9,83 \text{ atm L}. \end{aligned}$$

Etapa 4. Calcule PV para a alternativa D.

Para a mistura de oxigênio e nitrogênio a 293 K:

$$\begin{aligned}
 n_D &= \frac{8 \text{ g}}{32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} + \frac{14 \text{ g}}{28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \\
 &= 0,75 \text{ mol}, \\
 P_D V &= (0,75 \cdot 0,082 \cdot 293) \text{ atm L} \\
 &\approx 18,02 \text{ atm L}.
 \end{aligned}$$

Etapa 5. Calcule PV para a alternativa E e compare.

A amônia tem massa molar $17 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. A temperatura de 72°C corresponde a 345 K :

$$\begin{aligned}
 n_E &= \frac{13,6 \text{ g}}{17 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \\
 &= 0,8 \text{ mol}, \\
 P_E V &= (0,8 \cdot 0,082 \cdot 345) \text{ atm L} \\
 &\approx 22,63 \text{ atm L}.
 \end{aligned}$$

Esse é o maior valor de PV . Logo, a maior pressão corresponde à alternativa E.

Questão 37

Uma alíquota de 100 mL de uma solução que contém íons de Cr^{2+} e Cr^{3+} foi titulada com 200 mL de KMnO_4 com concentração $0,01 \text{ mol/L}$ (em ácido sulfúrico diluído), tendo sido todos os íons de Cr^{2+} oxidados a íons Cr^{3+} . Em seguida, uma outra alíquota de 100 mL da solução original foi tratada com Fe metálico para converter todos os íons de Cr^{3+} em íons de Cr^{2+} . A solução obtida consumiu 300 mL da mesma solução de KMnO_4 para a oxidação de todos os íons a Cr^{3+} .

A equação iônica simplificada é: $\text{KMnO}_4 + 5 \text{Cr}^{2+} \longrightarrow \text{Mn}^{2+} + 5 \text{Cr}^{3+} + 4 \text{H}_2\text{O} + \text{K}^+$

As concentrações molares de Cr^{2+} e de Cr^{3+} na solução original são:

- A ()** $[\text{Cr}^{2+}] = 0,05 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,1 \text{ mol/L}$.
B () $[\text{Cr}^{2+}] = 0,1 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,05 \text{ mol/L}$.
C () $[\text{Cr}^{2+}] = 0,004 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,002 \text{ mol/L}$.
D () $[\text{Cr}^{2+}] = 0,1 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,15 \text{ mol/L}$.
E () Não é possível calcular as concentrações sem conhecer a razão entre elas na solução original.

Gabarito: B

A primeira titulação mede o crômio(II) inicial. Após a redução do crômio(III), a segunda titulação mede o crômio total, permitindo obter as duas concentrações por diferença.

Etapa 1. Calcule a quantidade inicial de crômio(II).

Em meio ácido, cada mol de permanganato oxida 5 mols de Cr^{2+} . Para os 200 mL de titulante da primeira alíquota:

$$\begin{aligned}
 n_{\text{Cr}^{2+}} &= 5 C_{\text{KMnO}_4} V_1 \\
 &= 5 \left(0,01 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \right) (0,200 \text{ L}) \\
 &= 0,010 \text{ mol}.
 \end{aligned}$$

Etapa 2. Calcule a quantidade total de crômio.

Na segunda alíquota, o tratamento com ferro converte o Cr^{3+} em Cr^{2+} . Pela estequiometria adotada no enunciado, os 300 mL de titulante correspondem ao total de crômio:

$$\begin{aligned} n_{\text{total}} &= 5C_{\text{KMnO}_4}V_2 \\ &= 5(0,01 \frac{\text{mol}}{\text{L}})(0,300 \text{ L}) \\ &= 0,015 \text{ mol.} \end{aligned}$$

As duas alíquotas têm o mesmo volume. Logo, a quantidade inicial de crômio(III) em cada uma é

$$\begin{aligned} n_{\text{Cr}^{3+}} &= n_{\text{total}} - n_{\text{Cr}^{2+}} \\ &= 0,015 \text{ mol} - 0,010 \text{ mol} \\ &= 0,005 \text{ mol.} \end{aligned}$$

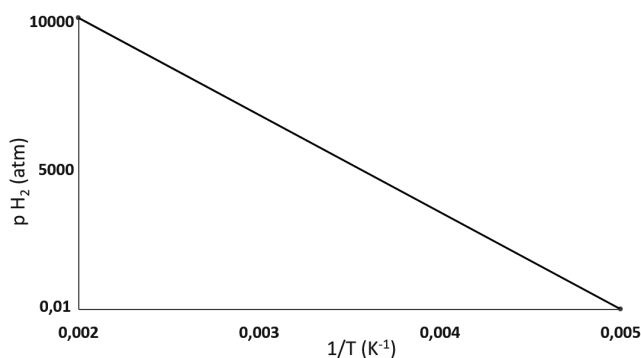
Etapas 3. Determine as concentrações na solução original.

Dividindo as quantidades de matéria pelo volume de cada alíquota, 0,100 L:

$$\begin{aligned} [\text{Cr}^{2+}] &= \frac{0,010 \text{ mol}}{0,100 \text{ L}} \\ &= 0,10 \frac{\text{mol}}{\text{L}}, \\ [\text{Cr}^{3+}] &= \frac{0,005 \text{ mol}}{0,100 \text{ L}} \\ &= 0,05 \frac{\text{mol}}{\text{L}}. \end{aligned}$$

Questão 38

O cálcio metálico reage com hidrogênio gasoso para produzir hidreto metálico. A pressão de equilíbrio do hidrogênio gasoso em função do inverso da temperatura absoluta dessa reação segue o gráfico a seguir.



Dados:

- $R = 8,0 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
- $\ln(10) = 2,3$

O calor, em kJ, envolvido na produção de 1 mol desse hidreto, a pressão constante de 1 atm, considerando comportamento de gás ideal, é aproximadamente igual a:

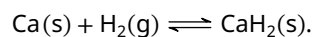
- A** () -37 **B** () -25 **C** () 0 **D** () +25 **E** () +37

Gabarito: A

A pressão de equilíbrio determina a constante K_p . A equação de van't Hoff relaciona sua variação com a temperatura à entalpia de formação do hidreto.

Etapla 1. Relacione a constante de equilíbrio à pressão.

A reação é



Como os sólidos puros têm atividade unitária, $K_p = 1/(P_{\text{H}_2}/P^\circ)$. Assim, para dois pontos do gráfico:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Etapla 2. Calcule a razão das constantes e a variação de $1/T$.

Escolhendo os extremos do gráfico, $P_1 = 0,01 \text{ atm}$ em $1/T_1 = 0,005 \text{ K}^{-1}$ e $P_2 = 10\,000 \text{ atm}$ em $1/T_2 = 0,002 \text{ K}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) &= \ln\left(\frac{0,01}{10000}\right) \\ &= -6 \ln 10 \\ &= -13,8.\end{aligned}$$

A diferença entre os inversos das temperaturas é

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} &= 0,002 \text{ K}^{-1} - 0,005 \text{ K}^{-1} \\ &= -0,003 \text{ K}^{-1}.\end{aligned}$$

Etapla 3. Determine a entalpia pela equação de van't Hoff.

Tomando ΔH aproximadamente constante no intervalo:

$$\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = -\frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Isolando a entalpia e substituindo os valores:

$$\begin{aligned}\Delta H &= -R \frac{\ln(K_2/K_1)}{1/T_2 - 1/T_1} \\ &= -(8,0 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}) \frac{-13,8}{-0,003 \text{ K}^{-1}} \\ &= -36\,800 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \\ &\approx -37 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}.\end{aligned}$$

A pressão constante, a formação de 1 mol de hidreto libera calor:

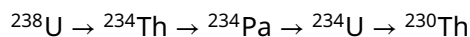
$$q_p = n\Delta H \approx \boxed{-37 \text{ kJ}}.$$



Questão 39

O gás hélio, raro na Terra, origina-se notadamente do decaimento radioativo dos tipos α e β dos elementos Urânio-238 e Tório-234, sendo encontrado em depósitos de gás natural.

Sabe-se que o esquema de decaimentos até a ocorrência do isótopo Tório-230 é:



Portanto, a partir de 1 mol de Urânio-238 e de 1 mol de Tório-234, até a ocorrência de Tório-230, obtém-se, no máximo:

- A () 1 mol de He. B () 2 mols de He. C () 3 mols de He.
D () 4 mols de He. E () nenhum mol de He.

Gabarito: C

Cada emissão alfa produz um núcleo de hélio. Basta contar essas emissões na cadeia de cada isótopo inicial e somar as quantidades de matéria correspondentes.

Etapla 1. Identifique as emissões de cada etapa.

A emissão alfa reduz o número de massa em 4. A emissão beta menos mantém o número de massa e aumenta o número atômico em 1. Na cadeia dada:

Transformação	Emissão
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{234}\text{Th}$	α
$^{234}\text{Th} \rightarrow ^{234}\text{Pa}$	β^-
$^{234}\text{Pa} \rightarrow ^{234}\text{U}$	β^-
$^{234}\text{U} \rightarrow ^{230}\text{Th}$	α

Etapla 2. Conte o hélio produzido por cada amostra.

Cada núcleo de urânio-238 passa por duas emissões alfa até chegar ao tório-230. Portanto, 1 mol de urânio-238 produz 2 mol de núcleos de hélio.

Cada núcleo de tório-234 passa por uma emissão alfa nesse percurso. Sua amostra inicial de 1 mol produz mais 1 mol de núcleos de hélio.

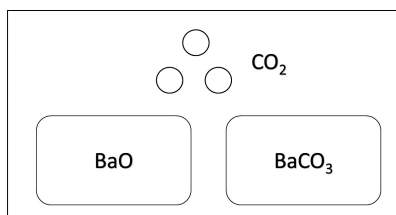
Etapla 3. Some as contribuições.

Após a captura de elétrons, cada núcleo alfa pode formar um átomo de hélio. A quantidade máxima é

$$\begin{aligned} n_{\text{He}} &= 2(1 \text{ mol}) + 1(1 \text{ mol}) \\ &= \boxed{3 \text{ mol}}. \end{aligned}$$

Questão 40

Na figura abaixo encontra-se ilustrada uma mistura em equilíbrio composta por $\text{BaCO}_3(\text{s})$, $\text{BaO}(\text{s})$ e $\text{CO}_2(\text{g})$, em sistema fechado, resultante da decomposição endotérmica do carbonato de bário.



Considere as seguintes situações, tendo por base as moléculas de $\text{CO}_2(\text{g})$:

- o equilíbrio após uma adição de moléculas de $\text{CO}_2(\text{g})$, de forma a triplicar a quantidade desse gás; e
- a mistura em equilíbrio a uma temperatura mais elevada.

A alternativa que melhor ilustra as situações i e ii, respectivamente, é:

A () e

B () e

C () e

D () e

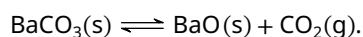
E () e

Gabarito: E

O equilíbrio heterogêneo fixa a pressão do único gás a cada temperatura, enquanto coexistem os dois sólidos. O sentido endotérmico determina o efeito do aquecimento.

Etapla 1. Escreva o equilíbrio de decomposição.

A decomposição do carbonato de bário é endotérmica:



Como $\Delta H > 0$ e as atividades dos sólidos puros são unitárias, a pressão de equilíbrio de CO_2 depende apenas da temperatura.

Etapla 2. Situação i: a quantidade de gás retorna ao valor inicial.

A adição de CO_2 aumenta inicialmente sua pressão. O equilíbrio se desloca para a esquerda, consumindo CO_2 e BaO para formar BaCO_3 , até restabelecer a pressão de equilíbrio.

Mantidos a temperatura e o volume, e permanecendo os dois sólidos, a quantidade de moléculas de gás volta ao valor inicial.

Etapla 3. Situação ii: a quantidade de gás aumenta.

O aquecimento favorece a reação endotérmica, no sentido direto. Assim, mais carbonato se decompõe e a quantidade de CO_2 no equilíbrio aumenta.



A representação com a quantidade inicial de gás em i e mais gás em ii é a alternativa E.