

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Dada a matriz

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

calcule $M^{2020} + M^{2022} + M^{2024} + M^{2025} + M^{2029}$.

Gabarito

O cálculo da soma pode ser simplificado analisando o padrão de repetição das potências da matriz M .

Etapa 1. Calcule as primeiras potências da matriz.

$$M^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Etapa 2. Determine as potências seguintes e reescreva a expressão.

A partir de $M^3 = -I$, determinam-se as potências sucessivas de M :

$$M^4 = -M, \quad M^5 = -M^2, \quad M^6 = I$$

A expressão original pode ser reescrita colocando M^{2020} em evidência:

$$\begin{aligned} M^{2020} + M^{2022} + M^{2024} + M^{2025} + M^{2029} &= M^{2020}(I + M^2 + M^4 + M^5 + M^9) \\ &= M^{2020}(I + M^2 - M - M^2 + M^3) \\ &= M^{2020}(I - M - I) \\ &= M^{2020}(-M) \\ &= -M^{2021} \end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule o valor da expressão.

Como a potência repete a cada 6, o expoente pode ser simplificado pelo resto da sua divisão por 6. Sabendo que $2021 = 6 \cdot 336 + 5$, tem-se:

$$\begin{aligned} -M^{2021} &= -M^5 \\ &= -(-M^2) \\ &= M^2 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Questão 2**

Seja i tal que $i^2 = -1$. Determine a área do triângulo no plano complexo cujos vértices são as raízes da equação

$$\left(z - \frac{3i}{2}\right)^3 = -27i$$

Gabarito

A partir da equação dada, aplicam-se as propriedades da radiciação de números complexos para encontrar os vértices do triângulo e, em seguida, calcular a sua área.

Etapla 1. Determine as raízes da equação.

Reescrevendo $-27i$ na forma trigonométrica:

$$\left(z - \frac{3i}{2}\right)^3 = 27 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Pela radiciação de De Moivre:

$$z - \frac{3i}{2} = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

Para $k = 0$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{3i}{2} + 3 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{3i}{2} + 3i \\ &= \frac{9i}{2} \end{aligned}$$

Para $k = 1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3i}{2} + 3 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ &= \frac{3i}{2} + 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Para $k = 2$:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{3i}{2} + 3 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) \\ &= \frac{3i}{2} + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Etapla 2. Calcule a área do triângulo.

O triângulo com os vértices z_0 , z_1 e z_2 tem base no eixo real de tamanho $3\sqrt{3}$ e altura de $\frac{9}{2}$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2}}{2} \\ &= \boxed{\frac{27\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

**Questão 3**

Resolva a seguinte inequação para x real:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \log_2 x & 1 \\ 4 & (\log_2 x)^2 & 1 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{colog}_2 x & 1/2 \\ 1 & (\operatorname{colog}_2 x)^2 & 1/4 \end{vmatrix}$$

Gabarito

A inequação é resolvida simplificando os determinantes, o que resulta em uma inequação de segundo grau em função de $\log_2 x$. É apresentada a resolução pelo método de Sarrus e, em seguida, uma abordagem alternativa pelo determinante de Vandermonde.

Solução 1.

Etapla 1. Desenvolva os determinantes pela Regra de Sarrus.

Calculando os dois determinantes:

$$\begin{aligned} \log_2 x + 2(\log_2 x)^2 + 4 - [4\log_2 x + (\log_2 x)^2 + 2] &\leq -\frac{\log_2 x}{4} + \frac{1}{2} + (\log_2 x)^2 - \left[-\log_2 x + \frac{(\log_2 x)^2}{2} + \frac{1}{4} \right] \\ -3\log_2 x + (\log_2 x)^2 + 2 &\leq \frac{3}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}(\log_2 x)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtém-se uma inequação quadrática em $\log_2 x$:

$$\frac{1}{2}(\log_2 x)^2 - \frac{15}{4}\log_2 x + \frac{7}{4} \leq 0$$

Etapla 2. Resolva a inequação e determine as raízes.

As raízes da equação associada são:

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \frac{\frac{15}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{15 \pm \sqrt{225 - 56}}{4} \\ &= \frac{15 \pm 13}{4} \end{aligned}$$

Para que a expressão seja menor ou igual a zero, a variável deve estar entre as raízes:

$$\begin{aligned} \log_2 x \geq \frac{1}{2} &\Rightarrow x \geq \sqrt{2} \\ \log_2 x \leq 7 &\Rightarrow x \leq 128 \end{aligned}$$

$$x \in [\sqrt{2}, 128]$$

Solução 2.

Etapla 3. Desenvolva os determinantes pela matriz de Vandermonde.

Os determinantes têm a forma característica da matriz de Vandermonde e podem ser calculados diretamente pelas diferenças dos elementos da segunda linha. Sabendo que $\operatorname{colog}_2 x = -\log_2 x$:

$$\begin{aligned} (\log_2 x - 2)(1 - \log_2 x)(1 - 2) &\leq (-\log_2 x - 1)\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \log_2 x\right) \\ 2(\log_2 x)^2 - 15\log_2 x + 7 &\leq 0 \end{aligned}$$

Dividindo por 4, chega-se à mesma inequação:



$$\frac{1}{2}(\log_2 x)^2 - \frac{15}{4}\log_2 x + \frac{7}{4} \leq 0$$

O restante da solução segue conforme a anterior.

Questão 4

Para n natural positivo, o número O_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética de razão 6 iniciada em 1. Dos 2024 primeiros números O_n , quantos apresentam resto 1 na divisão por 8?

Gabarito

A questão exige calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética e analisar sua congruência módulo 8.

Etapla 1. Calcule a expressão para a soma dos termos da progressão aritmética.

A PA possui primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 6$. O seu n -ésimo termo é $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 6$. A soma O_n é dada por:

$$\begin{aligned} O_n &= \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n \\ &= \left(\frac{1 + 1 + (n - 1) \cdot 6}{2} \right) \cdot n \\ &= (3n - 2) \cdot n \end{aligned}$$

Etapla 2. Analise a congruência de O_n módulo 8.

Calculando as congruências de O_n para os possíveis restos da divisão de n por 8:

$$\begin{aligned} n \equiv 1 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 1 - 2) \cdot 1 \equiv 1 \pmod{8} \\ n \equiv 2 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 2 - 2) \cdot 2 \equiv 8 \equiv 0 \pmod{8} \\ n \equiv 3 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 3 - 2) \cdot 3 \equiv 21 \equiv 5 \pmod{8} \\ n \equiv 4 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 4 - 2) \cdot 4 \equiv 40 \equiv 0 \pmod{8} \\ n \equiv 5 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 5 - 2) \cdot 5 \equiv 65 \equiv 1 \pmod{8} \\ n \equiv 6 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 6 - 2) \cdot 6 \equiv 96 \equiv 0 \pmod{8} \\ n \equiv 7 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 7 - 2) \cdot 7 \equiv 133 \equiv 5 \pmod{8} \\ n \equiv 0 &\implies O_n \equiv (3 \cdot 0 - 2) \cdot 0 \equiv 0 \pmod{8} \end{aligned}$$

Etapla 3. Determine a quantidade de números que satisfazem a condição.

Para que O_n tenha resto 1 na divisão por 8, n deve ter resto 1 ou 5 nessa divisão. Ou seja, em cada ciclo de 8 números inteiros consecutivos, 2 satisfazem a condição.

Como 2024 é múltiplo de 8 ($2024 = 8 \cdot 253$), o total de números procurado é:

$$\begin{aligned} \text{Total} &= \frac{2024}{8} \cdot 2 \\ &= \boxed{506} \end{aligned}$$

**Questão 5**

Para cada número inteiro $k \geq 1$, seja

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}$$

Determine o menor valor de k para o qual

$$|S_k - 1| < \frac{265}{4608}$$

Gabarito

O somatório dado pode ser desmembrado em duas somas conhecidas: uma soma telescópica e a soma dos termos de uma progressão geométrica. O valor de S_k obtido é, então, aplicado na inequação pedida.

Etapla 1. Calcule a expressão em forma fechada para a soma S_k .

Separando os termos do numerador:

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=1}^k \frac{2^n + (n^2 + n)}{2^{n+1} \cdot n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^k \left[\frac{2^n}{2^{n+1} \cdot n(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2^{n+1} \cdot n(n+1)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

A primeira soma é telescópica:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

A segunda soma é uma progressão geométrica finita de razão $1/2$ e primeiro termo $1/4$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^{n+1}} &= \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^k \right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \end{aligned}$$

Substituindo na expressão original:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2(k+1)} - \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \end{aligned}$$

Etapla 2. Determine o menor valor de k que satisfaz a inequação.

A diferença em módulo procurada é:



$$\begin{aligned}|S_k - 1| &= \left| -\frac{1}{2(k+1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \right| \\ &= \frac{1}{2(k+1)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\end{aligned}$$

Deve-se ter:

$$\frac{1}{2(k+1)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < \frac{265}{4608}$$

Analisando a expressão à esquerda, percebe-se que ela é estritamente decrescente em relação a k . Para o caso $k = 8$, tem-se uma igualdade:

$$\begin{aligned}|S_8 - 1| &= \frac{1}{18} + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{512} \\ &= \frac{256 + 9}{4608} \\ &= \frac{265}{4608}\end{aligned}$$

Como o enunciado exige a desigualdade estrita menor que $\frac{265}{4608}$ e a sequência é decrescente, o próximo número natural satisfaz a condição. O menor k é, portanto:

$$k = \boxed{9}$$

Questão 6

João nasceu no ano n e está prestando vestibular para o IME em 2023. Sejam A , B e C conjuntos de inteiros positivos tais que $|A| = |B| + 4$. Sabe-se que há n funções estritamente crescentes de A para C , bem como de B para C .

Observações:

- $|S|$ representa o número de elementos do conjunto S ;
- uma função é estritamente crescente quando $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Diante do exposto, determine:

- o número de funções f estritamente crescentes de A para C em função de $|A|$ e $|C|$;
- o ano no qual João nasceu.

Gabarito

O número de funções estritamente crescentes depende apenas da escolha dos elementos do conjunto imagem, recaindo em um problema de combinações. A relação entre essas combinações permite encontrar o ano de nascimento procurado.

Etapla 1. (a) Calcule o número de funções estritamente crescentes de A para C .

Para definir uma função estritamente crescente de A para C , basta selecionar $|A|$ elementos distintos do conjunto imagem C . Uma vez escolhidos, existe apenas uma forma de ordená-los para associar aos elementos de A , garantindo que a função seja estritamente crescente.

O número de funções é dado por:

$$\boxed{\binom{|C|}{|A|}}$$

Etapla 2. (b) Determine o ano no qual João nasceu.

Do enunciado, o número de funções de A para C é igual ao número de funções de B para C :



$$\binom{|C|}{|A|} = \binom{|C|}{|B|}$$

Sabe-se que $|A| = |B| + 4$. Substituindo:

$$\binom{|C|}{|B| + 4} = \binom{|C|}{|B|}$$

Como os denominadores são diferentes ($|B| + 4 \neq |B|$), as combinações devem ser complementares. Logo:

$$|C| = (|B| + 4) + |B|$$

$$|C| = 2|B| + 4$$

O número n representa a quantidade de funções, logo:

$$n = \binom{2|B| + 4}{|B| + 4} = \binom{2|B| + 4}{|B|}$$

João presta vestibular em 2023, então seu ano de nascimento deve ser coerente com a idade de um vestibulando, o que sugere um valor próximo a 2000. Testando valores inteiros positivos para $|B|$:

- Para $|B| = 4$:

$$n = \binom{12}{4} = 495$$

(incompatível)

- Para $|B| = 5$:

$$n = \binom{14}{5} = 2002$$

(compatível, João teria 21 anos)

- Para $|B| = 6$:

$$n = \binom{16}{6} = 8008$$

(incompatível)

Assim, a única solução possível é:

2002

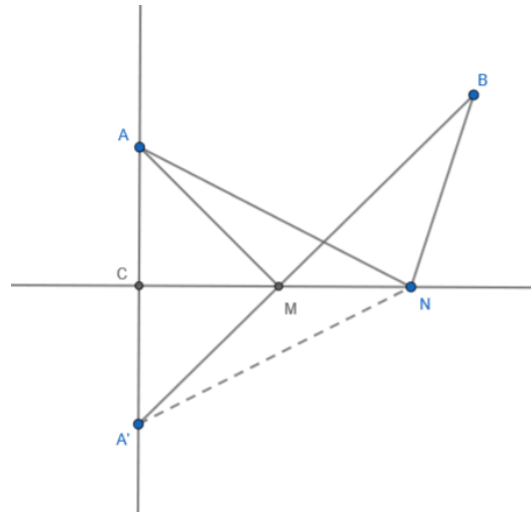
Questão 7

Dado um plano π e uma reta r nele contida, sejam A e B pertencentes a π dois pontos em um mesmo semiplano definido por r . O ponto A' é o simétrico a A em relação à reta r . Os segmentos de reta AA' e $A'B$ interceptam a reta r nos pontos C e M , respectivamente. Se N é um ponto da reta r distinto de M , prove que

$$\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AN} + \overline{NB}$$

Gabarito

O problema clássico do menor caminho com um ponto de reflexão pode ser resolvido com o uso de um ponto simétrico e a desigualdade triangular, ou ainda por meio das propriedades da elipse.

**Solução 1:****Etapa 1.** Prove a desigualdade pela simetria geométrica.

Como o ponto A' é o simétrico de A em relação à reta r , o segmento AA' é perpendicular a r e C é o seu ponto médio. Assim, a reta r é a mediatriz de AA' .

Isso implica que qualquer ponto de r é equidistante de A e de A' . Em particular, para os pontos M e N :

$$\overline{AM} = \overline{A'M}$$

$$\overline{AN} = \overline{A'N}$$

Como M é a interseção do segmento $A'B$ com a reta r , os pontos A' , M e B são colineares, o que torna $\overline{A'M} + \overline{MB} = \overline{A'B}$.

Por outro lado, o ponto N é um ponto genérico de r distinto de M , logo não pertence ao segmento $A'B$. Os pontos A' , N e B formam, portanto, um triângulo. Aplicando a desigualdade triangular no triângulo $A'NB$:

$$\overline{A'B} < \overline{A'N} + \overline{NB}$$

Substituindo pelas distâncias originais:

$$\overline{A'M} + \overline{MB} < \overline{A'N} + \overline{NB}$$

$$\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AN} + \overline{NB}$$

Solução 2:**Etapa 2.** Prove a desigualdade por propriedades das cônicas.

Considere uma elipse com focos em A e B que passa pelo ponto M . Por definição, todos os pontos da elipse possuem a mesma soma de distâncias aos focos que M , ou seja, $\overline{AM} + \overline{MB} = 2a$.

Pela propriedade refletora da elipse, os segmentos que unem os focos a um ponto da elipse formam o mesmo ângulo com a reta normal e, por consequência, o mesmo ângulo com a reta tangente nesse ponto.

Como A' é simétrico a A em relação a r , e os pontos A' , M e B são colineares, o ângulo entre a reta AM e a reta r é igual ao ângulo entre a reta BM e a reta r . Consequentemente, a reta r atua como um espelho e, portanto, é a reta tangente à elipse no ponto M .

Sendo r tangente à elipse, qualquer outro ponto N de r que seja distinto de M é externo à elipse. Para pontos externos a uma elipse, a soma das distâncias aos focos é estritamente maior que $2a$. Logo:

$$\overline{AN} + \overline{NB} > 2a = \overline{AM} + \overline{MB}$$

Portanto:

$$\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AN} + \overline{NB}$$

**Questão 8**

Dada a equação abaixo onde o valor de a é um número real

$$\frac{a \cos(x)}{2 \cos(2x) - 1} = \frac{a + \sin(x)}{(\cos^2(x) - 3 \sin^2(x)) \operatorname{tg}(x)}$$

Determine:

- a) os valores de a para os quais a equação admite solução;
- b) as soluções, em radianos, da equação em função de a .

Gabarito

A equação trigonométrica deve ser simplificada usando identidades para converter todos os termos em função do seno. Após obter a em função do seno, as condições de existência da expressão inicial definem as restrições para os valores de a .

Etapa 1. (a) Determine os valores de a para os quais a equação admite solução.

Substituindo as identidades trigonométricas nos denominadores:

$$\begin{aligned} 2 \cos(2x) - 1 &= 2(2 \cos^2(x) - 1) - 1 \\ &= 4 \cos^2(x) - 3 \\ \cos^2(x) - 3 \sin^2(x) &= \cos^2(x) - 3(1 - \cos^2(x)) \\ &= 4 \cos^2(x) - 3 \end{aligned}$$

Como os denominadores são iguais e não nulos (condição de existência), eles podem ser simplificados na equação original. Reescrevendo a tangente como a razão entre seno e cosseno:

$$\begin{aligned} a \cos(x) &= \frac{a + \sin(x)}{\operatorname{tg}(x)} \\ a \cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= a + \sin(x) \\ a \sin(x) - \sin(x) &= a \\ \sin(x)(a - 1) &= a \\ \sin(x) &= \frac{a}{a - 1} \end{aligned}$$

Como o valor do seno deve estar no intervalo $[-1, 1]$, a inequação para a é:

$$-1 \leq \frac{a}{a - 1} \leq 1$$

Analisando o módulo, para $a \neq 1$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{a - 1} \right| &\leq 1 \\ a^2 &\leq (a - 1)^2 \\ a^2 &\leq a^2 - 2a + 1 \\ 2a &\leq 1 \\ a &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Agora, determinam-se as restrições impostas pelas condições de existência da equação:

1. A tangente e o cosseno não podem zerar denominadores: $\operatorname{tg}(x) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$. $\cos(x) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) \neq \pm 1$. A equação $\frac{a}{a-1} = 1$ não possui solução. Para -1 , obtém-se: $\frac{a}{a-1} \neq -1 \Rightarrow a \neq -a+1 \Rightarrow 2a \neq 1 \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$.

2. O denominador original não pode ser zero:

$$\begin{aligned} 4 \cos^2(x) - 3 &\neq 0 \\ 4(1 - \operatorname{sen}^2(x)) - 3 &\neq 0 \\ 1 - 4 \operatorname{sen}^2(x) &\neq 0 \\ \operatorname{sen}^2(x) &\neq \frac{1}{4} \\ \operatorname{sen}(x) &\neq \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aplicando essa restrição sobre o valor encontrado de $\operatorname{sen}(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-1} &\neq \frac{1}{2} \Rightarrow 2a \neq a-1 \Rightarrow a \neq -1 \\ \frac{a}{a-1} &\neq -\frac{1}{2} \Rightarrow -2a \neq a-1 \Rightarrow 3a \neq 1 \Rightarrow a \neq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Combinando a desigualdade $a < \frac{1}{2}$ com todas as restrições ($a \neq 0$, $a \neq -1$ e $a \neq \frac{1}{3}$):

$$a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \setminus \left\{-1, 0, \frac{1}{3}\right\}$$

Etapla 2. (b) Determine as soluções em radianos.

Com $\operatorname{sen}(x) = \frac{a}{a-1}$, as soluções gerais para x são o arco cujo seno possui esse valor no primeiro/quarto quadrante e o seu suplementar correspondente no segundo/terceiro quadrante. Assim, adicionando o período $2k\pi$:

$$x = \arcsen\left(\frac{a}{a-1}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \arcsen\left(\frac{a}{a-1}\right) + 2k\pi$$

Questão 9

Os pontos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 5)$ e $D(7, 3)$ situam-se sobre lados distintos de um quadrado $EFGH$. Determine as coordenadas dos vértices desse quadrado.

Gabarito

O problema consiste em encontrar as retas que formam um quadrado a partir das posições relativas dos pontos dados. Dois vértices devem pertencer a lados paralelos e os outros dois a lados perpendiculares.

Etapla 1. Determine o coeficiente angular dos lados do quadrado.

Suponha que o lado contendo $A(1, 3)$ faça parte de uma reta r_A com coeficiente angular m . Como A e $B(2, 6)$ estão em lados distintos, considere inicialmente que a reta r_B passando por B é perpendicular a r_A , logo seu coeficiente angular é $-\frac{1}{m}$. As equações das retas são:

$$\begin{aligned} r_A : y - 3 &= m(x - 1) \Rightarrow mx - y - m + 3 = 0 \\ r_B : y - 6 &= -\frac{1}{m}(x - 2) \Rightarrow x + my - 2 - 6m = 0 \end{aligned}$$

Como $C(7, 5)$ e $D(7, 3)$ estão sobre os outros lados do quadrado, a distância de C a r_A deve ser igual à distância de D a r_B (ou vice-versa). Testando a hipótese de que C seja oposto a r_A e D oposto a r_B :



$$\begin{aligned}
 d(C, r_A) &= d(D, r_B) \\
 \frac{|m(7) - 5 - m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} &= \frac{|7 + m(3) - 2 - 6m|}{\sqrt{1^2 + m^2}} \\
 \frac{|6m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= \frac{|-3m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} \\
 |6m - 2| &= |-3m + 5|
 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação modular:

$$1. \ 6m - 2 = -3m + 5 \implies 9m = 7 \implies m = \frac{7}{9}$$

$$2. \ 6m - 2 = 3m - 5 \implies 3m = -3 \implies m = -1$$

Se $m = \frac{7}{9}$, as ordenadas e abscissas dos vértices não se alinham de modo a formar os lados no interior do polígono (os pontos recaem nos prolongamentos dos lados para essa disposição). Resta $m = -1$.

Etapla 2. Determine as equações das retas dos lados.

Com $m = -1$, as retas r_A e r_B e suas paralelas opostas r_C e r_D são:

$$r_A : -x - y - (-1) + 3 = 0 \implies x + y = 4$$

$$r_B : x - y - 2 - 6(-1) = 0 \implies y - x = 4$$

$$r_C : y - 5 = -1(x - 7) \implies x + y = 12$$

$$r_D : y - 3 = 1(x - 7) \implies y - x = -4$$

Etapla 3. Calcule os vértices do quadrado.

Os vértices são as interseções das retas que compõem os lados adjacentes:

- Interseção de r_A e r_B : $(0, 4)$
- Interseção de r_B e r_C : $(4, 8)$
- Interseção de r_C e r_D : $(8, 4)$
- Interseção de r_D e r_A : $(4, 0)$

Os vértices do quadrado são:

$$(0, 4), (4, 8), (8, 4), (4, 0)$$

Questão 10

Considere uma pirâmide triangular regular reta de altura h . Uma esfera de raio r contém os ortocentros das faces laterais da pirâmide e o vértice do qual foi traçada a altura da pirâmide. Calcule o volume da pirâmide em função de r e h .

Gabarito

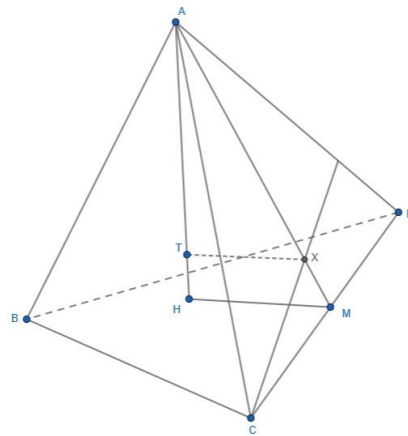
A partir da relação de semelhança entre triângulos da face lateral e de seções internas à pirâmide, a medida da aresta da base pode ser determinada em função de r e h . Com a aresta, calcula-se o volume.

Etapla 1. Defina as dimensões da pirâmide e localize o centro da esfera.

Seja $2a$ a aresta da base e H o pé da altura da pirâmide regular de vértice A . A altura é $AH = h$. O apótema da base é a terça parte da altura da base:

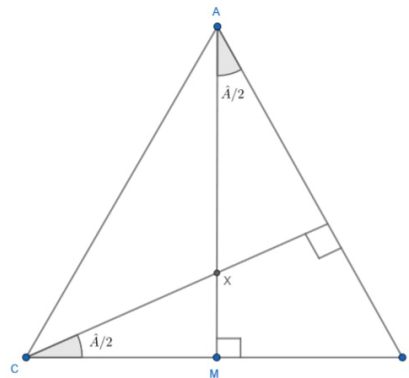
$$HM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Seja O o centro da esfera dada. Por simetria em relação à pirâmide regular, O pertence ao segmento AH . A esfera passa pelo vértice A e pelos ortocentros das faces laterais.



Etapla 2. Determine as medidas da face lateral e o seu ortocentro X .

Sejam X , Y e Z os ortocentros das faces laterais ACD , ABD e ABC . Na face lateral ACD , com base $2a$ e altura (apótema da pirâmide) $AM = g$:



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHM :

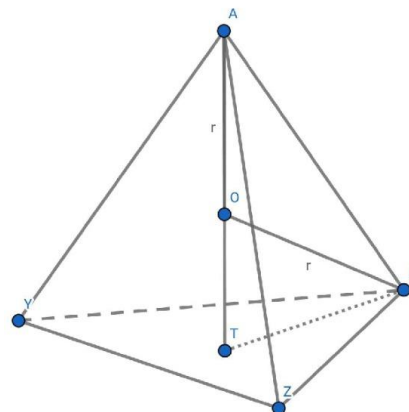
$$AM = g = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$$

Como X é ortocentro do triângulo isósceles ACD , a distância do vértice ao ortocentro é:

$$AX = AM - XM = g - a \cdot \frac{a}{g} = \frac{g^2 - a^2}{g}$$

Etapla 3. Relacione o raio r com as medidas da pirâmide.

Traçando um segmento $TX \parallel HM$, com $T \in AH$, observa-se que T é o centro da base da pirâmide auxiliar $AXYZ$.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OTX :

$$\overline{OT}^2 + \overline{TX}^2 = r^2$$

$$(\overline{AT} - r)^2 + \overline{TX}^2 = r^2$$

$$\overline{AT}^2 - 2 \cdot \overline{AT} \cdot r + r^2 + \overline{TX}^2 = r^2$$

$$2 \cdot \overline{AT} \cdot r = \overline{AT}^2 + \overline{TX}^2$$

Como o triângulo ATX é retângulo em T , $\overline{AT}^2 + \overline{TX}^2 = \overline{AX}^2$. Logo:

$$2 \cdot \overline{AT} \cdot r = \overline{AX}^2$$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{2r}$$

O triângulo ATX é semelhante ao triângulo AHM . Portanto, a razão entre cateto e hipotenusa é mantida:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AM}} \Rightarrow \frac{\overline{AX}}{2r} = \frac{h}{g} \Rightarrow \overline{AX} = \frac{2rh}{g}$$

Etapla 4. Determine a^2 e calcule o volume da pirâmide.

Igualando as duas expressões encontradas para $\overline{AX}$:

$$\frac{g^2 - a^2}{g} = \frac{2rh}{g}$$

$$a^2 = g^2 - 2rh$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{3} - 2rh$$

$$\frac{2a^2}{3} = h^2 - 2rh$$

$$a^2 = \frac{3h(h - 2r)}{2}$$

O volume da pirâmide $ABCD$ é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área da base} \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{3} h}{3}$$

Substituindo o valor de a^2 :

$$V = \frac{\sqrt{3} h}{3} \cdot \left(\frac{3h(h - 2r)}{2} \right)$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3} h^2 (h - 2r)}{2}}$$