

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Números palíndromos na base b são números cuja representação nesta base é simétrica, ou seja, se os seus algarismos forem lidos de trás para frente obtém-se o mesmo número. A quantidade de números naturais positivos menores ou iguais a $(377)_8$ que são palíndromos na base dois é

Observação: Considere que todo número não nulo na base 2 começa por 1.

A () 16

B () 26

C () 30

D () 31

E () 32

Gabarito: C

A contagem pode ser feita pelo número de algarismos em base dois. Em cada palíndromo, a primeira metade determina a segunda.

Etapa 1. Converta o limite para a base dois.

O maior número permitido tem oito algarismos binários:

$$\begin{aligned}(377)_8 &= 3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 7 \\ &= 255 \\ &= (11111111)_2.\end{aligned}$$

Etapa 2. Conte os palíndromos de cada tamanho.

O primeiro e o último algarismos são 1. Os demais algarismos da primeira metade, incluindo o central quando houver, podem ser 0 ou 1.

Número de algarismos	Algarismos livres	Palíndromos
1 ou 2	0	1 de cada tamanho
3 ou 4	1	2 de cada tamanho
5 ou 6	2	4 de cada tamanho
7 ou 8	3	8 de cada tamanho

Somando as oito possibilidades de tamanho, obtém-se

$$N = 2(1 + 2 + 4 + 8) = \boxed{30}.$$



Questão 2

Seja $f : [3, \infty) \rightarrow B$ a função definida por

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \right)^n,$$

onde $B = \{f(a) \mid a \in [3, \infty)\}$.

A soma das coordenadas do ponto pertencente ao gráfico da função inversa de $f(x)$ mais próximo do eixo das abscissas é

A () -1

B () 0

C () 1

D () 3

E () 4

Gabarito: E

A soma da progressão geométrica permite escrever f de forma explícita. Em seguida, a função inversa fornece o ponto de menor ordenada.

Etapla 1. Some a progressão geométrica.

Para $x \geq 3$, a razão $q = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}$ satisfaz $0 \leq q < 1$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Etapla 2. Determine o ponto da função inversa.

A imagem de f é $B = [1, \infty)$. Trocando as variáveis na expressão de f , obtém-se

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{2}} \\ y &= 2x^2 + 1, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

A menor ordenada é 3, atingida em $x = 1$. Logo, o ponto é $(1, 3)$ e a soma pedida vale **4**.

Questão 3

Considere a sequência de números complexos $z_1 = (1 + i)$, $z_2 = (1 + i)^2$, ..., $z_{20} = (1 + i)^{20}$, onde $i^2 = -1$.

A maior área possível do triângulo formado pelos afijos de três números consecutivos dessa sequência é

A () 2^{16} B () 2^{17} C () 2^{18} D () 2^{19} E () 2^{20}

Gabarito: B

A área pode ser calculada pelo determinante das coordenadas complexas. Colocar os fatores comuns em evidência reduz o cálculo a um determinante constante.

Etapla 1. Escreva o determinante da área.

Para três termos consecutivos, sejam $z = z_n$, $z_{n+1} = (1+i)z$ e $z_{n+2} = 2iz$. A área é o módulo da expressão

$$A_n = \left| \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ (1+i)z & (1-i)\bar{z} & 1 \\ 2iz & -2i\bar{z} & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Como $z_n = (\sqrt{2})^n \operatorname{cis}(n\pi/4)$, o produto dos fatores retirados das duas primeiras colunas é $z\bar{z} = 2^n$.

Etapas 2. Calcule o determinante reduzido.

Após a fatoração, subtraia a primeira linha das demais e desenvolva pela terceira coluna:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2^n}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+i & 1-i & 1 \\ 2i & -2i & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2^n}{4} \begin{vmatrix} i & -i \\ 2i-1 & -2i-1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2^n}{4} |-2i| \\ &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Etapas 3. Maximize a área.

O último termo do triângulo é z_{n+2} , de modo que $n+2 \leq 20$. A área cresce com n e atinge o máximo em $n = 18$:

$$A_{\max} = \boxed{2^{17}}.$$

Questão 4

Seja a equação $x^2 - px + q = 0$, na variável x , com raízes a e b . Então o valor de $a^4 + b^4$ é

A () $p^4 + 4q^2 - 2p^2q$ **B** () $p^4 + 4q^2 - 4p^2q$ **C** () $p^4 + 2q^2 - 4p^2q$ **D** () $p^4 + 4q^2 - 4p^4q$ **E** () $p^4 + 2q^2 - 2p^2q$

Gabarito: C

As relações de Girard permitem expressar a soma das quartas potências em função da soma e do produto das raízes.

Etapas 1. Reescreva a expressão pedida.

Pelas relações de Girard, $a + b = p$ e $ab = q$. Logo,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= p^2 - 2q. \end{aligned}$$

Etapas 2. Calcule a soma das quartas potências.

Elevando a relação anterior ao quadrado e retirando o termo misto, obtém-se

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ &= (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 \\ &= \boxed{p^4 + 2q^2 - 4p^2q}. \end{aligned}$$



Questão 5

Sejam α , β e γ as raízes da equação $x^3 + 6x^2 - 6x - 3 = 0$.

O valor de $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$ é

A () 12

B () 18

C () 27

D () 33

E () 42

Gabarito: D

A soma das raízes transforma cada fator pedido em uma diferença. O produto resultante é o próprio polinômio avaliado em -6 .

Etapla 1. Relacione o produto ao polinômio.

Por Girard, $\alpha + \beta + \gamma = -6$. Portanto, os fatores são $-6 - \gamma$, $-6 - \alpha$ e $-6 - \beta$.
Para $p(x) = x^3 + 6x^2 - 6x - 3$, a fatoração pelas raízes é

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Etapla 2. Avalie o polinômio em -6 .

O produto procurado vale

$$\begin{aligned} p(-6) &= (-6)^3 + 6(-6)^2 - 6(-6) - 3 \\ &= -216 + 216 + 36 - 3 \\ &= \boxed{33}. \end{aligned}$$

Questão 6

Considere a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 2 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ 2 & 0 & x & 2 & 3 & \dots & 2022 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{bmatrix}$$

de ordem 2024.

A soma das raízes do polinômio dado por $p(x) = \det(A)$, $x \in \mathbb{R}$, é

A () 2024×2023 B () 2025^2 C () 2024×2025 D () 1012×2025 E () 1011×2023

Gabarito: E

A regra de Chió reduz o determinante a um produto de fatores lineares. As raízes formam uma progressão aritmética.

Etapla 1. Fatore o determinante.

Retirando o fator 2 da primeira coluna, o elemento superior esquerdo passa a ser 1. Pela regra de Chió, subtrai-se de cada elemento restante o produto dos elementos correspondentes da primeira coluna e da primeira linha.
A matriz reduzida é diagonal, com entradas x , $x - 1$, $x - 2$, até $x - 2022$. Assim,

$$p(x) = 2x(x-1)(x-2) \cdots (x-2022).$$

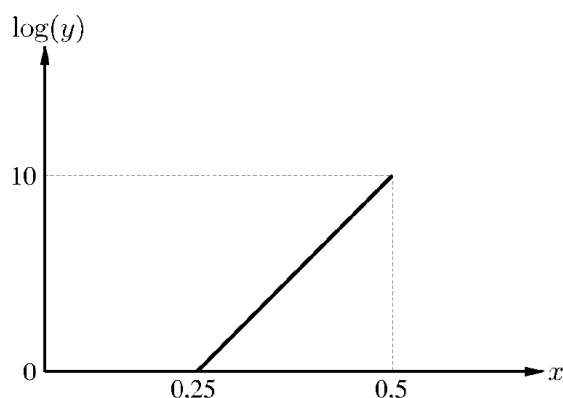
Etapla 2. Some as raízes.

As raízes são os 2023 inteiros de 0 a 2022. A soma é

$$\begin{aligned} S &= \frac{2023(0 + 2022)}{2} \\ &= \boxed{1011 \times 2023}. \end{aligned}$$

Questão 7

Seja $y = a^{bx-10}$, a e b reais, onde os valores de x e $\log(y)$ são relacionados pelo gráfico abaixo.



Então o valor de $a + b$ é

A () 20

B () 30

C () 40

D () 50

E () 60

Gabarito: D

O logaritmo da função é uma expressão linear em x . Os dois pontos indicados no gráfico determinam a e b .

Etapla 1. Determine o valor de b .

Aplicando o logaritmo decimal, obtém-se $\log y = (bx - 10) \log a$. O ponto $(0,25, 0)$ fornece

$$0 = (0,25b - 10) \log a.$$

Como o gráfico não é horizontal, $\log a \neq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0,25b &= 10 \\ b &= 40. \end{aligned}$$

Etapla 2. Determine a e calcule a soma.

Substituindo o ponto $(0,5, 10)$ e o valor de b , segue que

$$\begin{aligned} 10 &= (0,5 \cdot 40 - 10) \log a \\ \log a &= 1 \\ a &= 10. \end{aligned}$$

Logo, $a + b = \boxed{50}$.

Questão 8

São dados os pontos A e B sobre uma circunferência de raio r , de forma que a corda $\overline{AB}$ mede r . Escolhe-se ao acaso um ponto C sobre o maior arco $\widehat{AB}$. A probabilidade da área do triângulo ABC ser maior que $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$ é

A () $\frac{1}{5}$

B () $\frac{2}{5}$

C () $\frac{1}{2}$

D () $\frac{3}{5}$

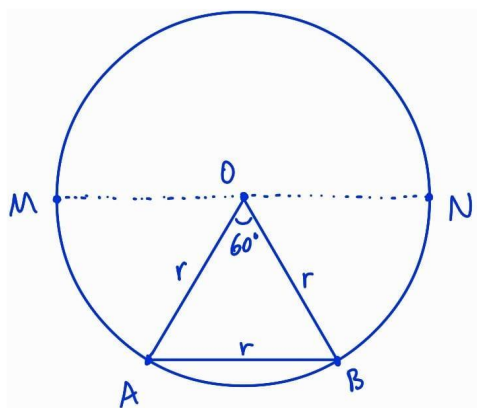
E () $\frac{4}{5}$

Gabarito: D

Como a base AB é fixa, basta comparar as alturas dos triângulos. A probabilidade será a razão entre os comprimentos dos arcos favorável e disponível.

Etapa 1. Identifique o arco favorável.

Seja O o centro da circunferência. Como $OA = OB = AB = r$, o triângulo AOB é equilátero e tem área $r^2\sqrt{3}/4$.



A área de ABC supera esse valor quando C está acima da reta MN , paralela a AB e passando por O . O arco favorável é, portanto, a semicircunferência superior, de comprimento πr .

Etapa 2. Compare os comprimentos dos arcos.

O arco menor AB corresponde a 60° . O comprimento do arco maior, no qual C é escolhido, é

$$\begin{aligned}\ell &= 2\pi r - \frac{2\pi r}{6} \\ &= \frac{5\pi r}{3}.\end{aligned}$$

Admitindo escolha uniforme ao longo desse arco, a probabilidade pedida é

$$P = \frac{\pi r}{5\pi r/3} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

Questão 9

Considere a inequação

$$(x^2 - 100)(x^2 - 150)(x^2 - 200) < 0$$

A quantidade de números inteiros que a satisfazem é

A () 23

B () 24

C () 25

D () 26

E () 27

Gabarito: A

O sinal do produto muda nas raízes de cada fator. A contagem deve considerar apenas os intervalos em que há um número ímpar de fatores negativos.

Etapa 1. Determine os intervalos de sinal negativo.

Os fatores se anulam em ± 10 , $\pm\sqrt{150}$ e $\pm 10\sqrt{2}$. O estudo de sinais fornece

$$x \in (-10\sqrt{2}, -\sqrt{150}) \cup (-10, 10)$$

ou

$$x \in (\sqrt{150}, 10\sqrt{2}).$$

Etapa 2. Conte os inteiros nos intervalos.

Como $12 < \sqrt{150} < 13$ e $14 < 10\sqrt{2} < 15$, os intervalos externos contêm -14 , -13 , 13 e 14 . O intervalo central contém os 19 inteiros de -9 a 9 .

A quantidade total é $19 + 4 = \boxed{23}$.

Questão 10

Seja

$$r = \sqrt{3 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}}$$

Sobre a inequação $\sqrt{2025 + \sqrt{t}} + \sqrt{2025 - \sqrt{t}} \leq \sqrt{2025r}$ pode-se afirmar que a mesma

A () não possui solução real

B () possui uma única solução real

C () possui exatamente duas soluções reais

D () possui solução entre 0 e $\frac{2025^2}{6}$

E () possui solução entre $\frac{2025^2}{3}$ e $\frac{2025^2}{2}$

Gabarito: B

Os radicais de r podem ser simplificados de dentro para fora. Depois, o domínio e o quadrado da inequação permitem contar as soluções reais.

Etapa 1. Simplifique os radicais internos.

As duas raízes mais internas são

$$\begin{aligned}\sqrt{18 - \sqrt{128}} &= 4 - \sqrt{2}, \\ \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{12} + 4 - \sqrt{2}} &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} - 1.\end{aligned}$$

Substituindo na raiz seguinte, obtém-se

$$\begin{aligned}\sqrt{3 + \sqrt{3} - 1} &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Etapla 2. Determine o valor de r .

A raiz seguinte reduz-se a

$$\begin{aligned}\sqrt{2 + 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)} &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} + 1.\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } r = \sqrt{3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1} = 2.$$

Etapla 3. Resolva a inequação no domínio real.

O domínio é $0 \leq t \leq 2025^2$. Substituindo $r = 2$, a inequação fica

$$\sqrt{2025 + \sqrt{t}} + \sqrt{2025 - \sqrt{t}} \leq \sqrt{4050}.$$

Os dois membros são não negativos. Elevando ao quadrado e simplificando,

$$\begin{aligned}4050 + 2\sqrt{2025^2 - t} &\leq 4050, \\ 2\sqrt{2025^2 - t} &\leq 0.\end{aligned}$$

A raiz só pode ser zero, o que ocorre em $t = 2025^2$. Portanto, há 1 solução real.

Questão 11

O número de soluções da equação $\cos^3(x) + \sin^3(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) = 1$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é

A () 0

B () 1

C () 2

D () 3

E () 4

Gabarito: C

A soma de cubos permite fatorar a equação. O fator que permanece diferente de zero reduz o problema a uma relação entre seno e cosseno.

Etapla 1. Fatore a equação.

Escreva $s = \sin x$ e $c = \cos x$. Usando $\sin(2x) = 2sc$ e $s^2 + c^2 = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned}s^3 + c^3 + sc &= 1, \\ (s + c)(s^2 - sc + c^2) + sc &= 1, \\ (s + c)(1 - sc) &= 1 - sc.\end{aligned}$$

Como $|sc| \leq 1/2$, o fator $1 - sc$ é diferente de zero. Logo, $s + c = 1$.

Etapa 2. Conte as soluções no intervalo.

Elevando $s + c = 1$ ao quadrado, segue que $1 + 2sc = 1$, isto é, $sc = 0$. Substituindo na relação $s + c = 1$, os pares possíveis são $(s, c) = (0, 1)$ e $(1, 0)$.

No intervalo dado, correspondem a $x = 0$ e $x = \pi/2$. Portanto, há 2 soluções.

Questão 12

Considere um triângulo com vértices em $A(1, 2)$, $B(2, 2)$ e $C(4, 0)$.

A equação da reta que é a bissetriz interna do triângulo referente ao vértice A é

A () $2x + (3 - \sqrt{13})y + (2\sqrt{13} - 8) = 0$

B () $2x + (3 + \sqrt{13})y - (2\sqrt{13} + 8) = 0$

C () $x + (4 + \sqrt{13})y - (2\sqrt{13} + 9) = 0$

D () $x + (4 - \sqrt{13})y + (2\sqrt{13} - 9) = 0$

E () $(3 + \sqrt{13})x + 2y - (\sqrt{13} + 7) = 0$

Gabarito: B

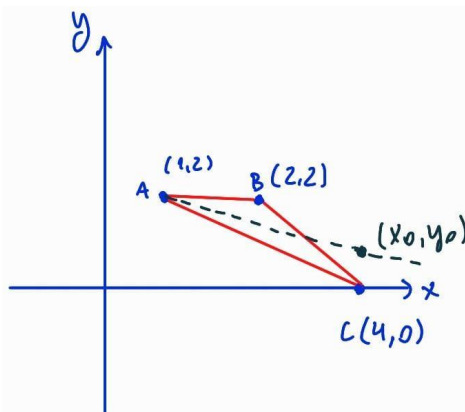
Os pontos da bissetriz têm a mesma distância às retas AB e AC . Entre as duas bissetrizes obtidas, o sinal do coeficiente angular identifica a interna.

Etapa 1. Escreva as equações dos lados.

A reta AB é horizontal, e a reta AC tem coeficiente angular $-2/3$. Logo,

$$AB : y - 2 = 0,$$

$$AC : 2x + 3y - 8 = 0.$$



Etapa 2. Iguale as distâncias aos lados.

Para um ponto (x_0, y_0) da bissetriz, a fórmula da distância entre ponto e reta fornece

$$|y_0 - 2| = \frac{|2x_0 + 3y_0 - 8|}{\sqrt{13}}.$$

Retirando os módulos, surgem as duas possibilidades:

$$y_0 = \frac{2x_0 + 2\sqrt{13} - 8}{\sqrt{13} - 3},$$

$$y_0 = \frac{-2x_0 + 2\sqrt{13} + 8}{\sqrt{13} + 3}.$$

Etapa 3. Selecione a bissetriz interna.

A bissetriz interna parte de A em direção ao lado BC e tem coeficiente angular negativo. Portanto, corresponde à segunda expressão. Reorganizando os termos,

$$2x + (3 + \sqrt{13})y - (2\sqrt{13} + 8) = 0.$$

Questão 13

Seja I o incentro do triângulo ABC e L a interseção da semi-reta $\vec{AI}$ com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , com A e L distintos.

Dado que $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{BC}$, o valor de $\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}$ é

A () $\frac{1}{2}$

B () 1

C () $\frac{3}{2}$

D () 2

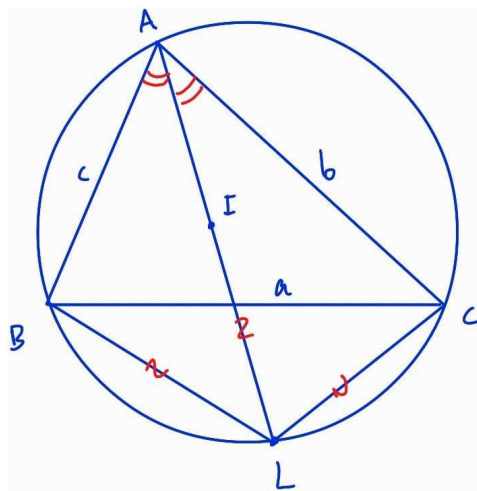
E () $\frac{5}{2}$

Gabarito: A

A bissetriz interna divide o arco oposto em duas partes iguais. O teorema de Ptolomeu relaciona as cordas do quadrilátero inscrito e fornece a razão pedida.

Etapa 1. Identifique as cordas de mesmo comprimento.

Como AL é bissetriz do ângulo A , os arcos BL e LC são iguais. Logo, $BL = LC$.

**Etapa 2.** Aplique o teorema de Ptolomeu.

No quadrilátero inscrito $ABLC$, o produto das diagonais é a soma dos produtos dos lados opostos:

$$\begin{aligned} AL \cdot BC &= AB \cdot LC + AC \cdot BL \\ &= (AB + AC) \cdot BL. \end{aligned}$$

Usando $AB + AC = 2BC$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{BL}{AL} &= \frac{BC}{AB + AC} \\ &= \frac{BC}{2BC} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Questão 14

São dados n círculos de mesmo raio r , cujos centros são os vértices de um polígono regular P de n lados, de forma que cada círculo tangencia externamente dois outros círculos. Seja R o raio do círculo circunscrito a P .

O valor de n quando $R = 2r$ é

A () 3

B () 4

C () 5

D () 6

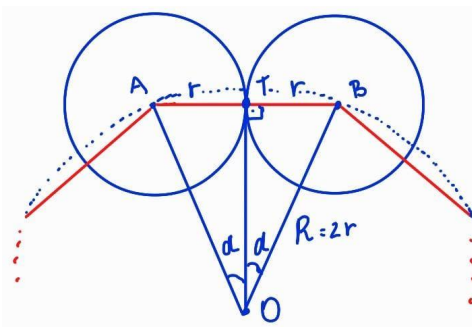
E () 8

Gabarito: D

A tangência fixa a distância entre centros consecutivos em $2r$. Um triângulo retângulo relaciona essa distância ao raio R e ao ângulo central do polígono.

Etapla 1. Calcule a metade do ângulo central.

Sejam A e B os centros de dois círculos tangentes, T o ponto de tangência e O o centro de P . Como $AT = r$, $OA = R$ e $OT \perp AB$,



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{r}{R} \\ &= \frac{r}{2r} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Assim, $\alpha = 30^\circ$ e o ângulo central é $2\alpha = 60^\circ$.

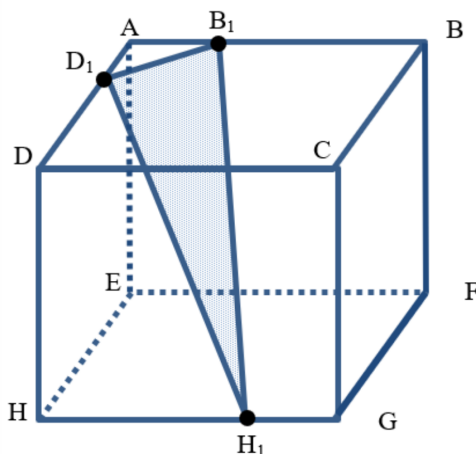
Etapla 2. Determine o número de lados.

Os n ângulos centrais completam uma volta. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{360^\circ}{n} &= 60^\circ, \\ n &= \boxed{6}.\end{aligned}$$

Questão 15

No cubo $ABCDEFGH$, a aresta mede l . Conforme a figura, o ponto B_1 , sobre a aresta AB , é tal que $\overline{AB_1} = l/3$; o ponto D_1 , sobre a aresta AD , é tal que $\overline{AD_1} = l/3$ e o ponto H_1 , sobre a aresta GH , é tal que $\overline{GH_1} = l/3$.



A área do triângulo $B_1D_1H_1$ é

A () $\frac{l^2}{9}$

B () $\frac{l^2\sqrt{3}}{18}$

C () $\frac{5l^2\sqrt{34}}{18}$

D () $\frac{2l^2\sqrt{2}}{9}$

E () $\frac{l^2\sqrt{34}}{18}$

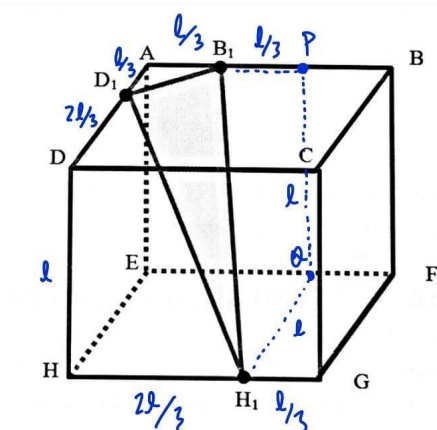
Gabarito: E

O teorema de Pitágoras fornece os três lados do triângulo. A relação entre seus quadrados permite reconhecer um ângulo reto e calcular a área.

Etapa 1. Calcule os comprimentos dos lados.

Na face superior do cubo, o segmento D_1B_1 é a hipotenusa de um triângulo com catetos $l/3$:

$$\begin{aligned} D_1B_1 &= \sqrt{\frac{l^2}{9} + \frac{l^2}{9}} \\ &= \frac{l\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$



Para os outros lados, somam-se os quadrados das componentes em três direções perpendiculares:

$$\begin{aligned}
 D_1 H_1 &= \sqrt{DD_1^2 + DH^2 + HH_1^2} \\
 &= \sqrt{\frac{4\rho^2}{9} + \rho^2 + \frac{4\rho^2}{9}} \\
 &= \frac{\rho\sqrt{17}}{3}, \\
 B_1 H_1 &= \sqrt{B_1 P^2 + PQ^2 + H_1 Q^2} \\
 &= \sqrt{\frac{\rho^2}{9} + \rho^2 + \rho^2} \\
 &= \frac{\rho\sqrt{19}}{3}.
 \end{aligned}$$

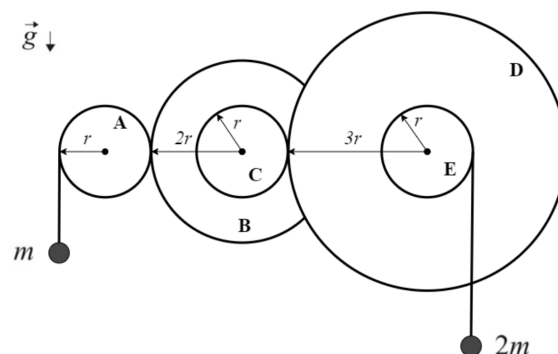
Etapla 2. Identifique o ângulo reto e calcule a área.

Como $2 + 17 = 19$, os lados satisfazem $D_1 B_1^2 + D_1 H_1^2 = B_1 H_1^2$. O ângulo em D_1 é reto. Logo,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{D_1 B_1 \cdot D_1 H_1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\rho\sqrt{17}}{3} \\
 &= \boxed{\frac{\rho^2\sqrt{34}}{18}}.
 \end{aligned}$$

GABARITO FÍSICA

Questão 16



Cinco discos A, B, C, D e E, de centros fixos, giram solidariamente conforme a geometria da figura. Duas partículas de massas m e $2m$ enrolam ou desenrolam fios inextensíveis às mesmas velocidades escalares das bordas de seus respectivos discos.

Dados:

- aceleração da gravidade: g ;

Observações:

- os cinco discos estão inicialmente em repouso;
- os cinco centros dos discos estão na mesma horizontal;
- o disco A está engrenado ao disco B;
- ao girar, o disco B faz o disco C girar à mesma velocidade angular, pois B e C são concêntricos;
- o disco C está engrenado ao disco D;
- ao girar, o disco D faz o disco E girar à mesma velocidade angular, pois D e E são concêntricos;
- a partícula de menor massa está associada ao disco A e a de maior massa ao disco E;
- despreze as massas dos discos e desconsidere quaisquer deslizamentos.

Pelo princípio da conservação da energia, a aceleração (módulo e sentido) da partícula de maior massa, após o início de seu movimento, é:

A () $\frac{2}{19}g$, de baixo para cima (enrolando o fio)

B () $\frac{2}{19}g$, de cima para baixo (desenrolando o fio)

C () $\frac{4}{19}g$, de baixo para cima (enrolando o fio)

D () $\frac{4}{11}g$, de cima para baixo (desenrolando o fio)

E () $\frac{4}{11}g$, de baixo para cima (enrolando o fio)

Gabarito: A

A razão entre os raios determina a relação entre os movimentos das partículas. Com essa relação, a conservação da energia fornece a aceleração da massa $2m$.

Etapa 1. Relacione as velocidades.

Os contatos entre discos e a igualdade das velocidades angulares dos discos concêntricos fornecem, em módulo,

$$\omega_A r = \omega_B (2r),$$

$$\omega_C = \omega_B,$$

$$\omega_C r = \omega_D (3r),$$

$$\omega_E = \omega_D.$$

Assim, $\omega_A = 6\omega_E$ e a velocidade da massa m tem módulo seis vezes maior que a da massa $2m$. As partículas se deslocam em sentidos verticais opostos.

Etapla 2. Aplique a conservação da energia.

Seja a a aceleração algébrica de $2m$, positiva para baixo. Partindo do repouso, as variações de altura e os quadrados das velocidades são

$$\Delta h_{2m} = -\frac{at^2}{2}, \quad v_{2m}^2 = a^2 t^2,$$

$$\Delta h_m = 3at^2, \quad v_m^2 = 36a^2 t^2.$$

Os discos não armazenam energia cinética, pois suas massas são desprezíveis. O trabalho total das trações no sistema ideal se anula. Portanto,

$$2mg\Delta h_{2m} + mg\Delta h_m + \frac{2mv_{2m}^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} = 0.$$

Substituindo as relações anteriores,

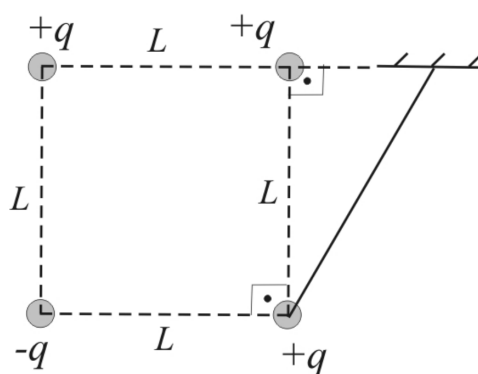
$$-mgat^2 + 3mgat^2 + 19ma^2 t^2 = 0,$$

$$2g + 19a = 0,$$

$$a = -\frac{2g}{19}.$$

O sinal negativo indica movimento para cima. A aceleração tem módulo $\boxed{2g/19}$, de baixo para cima, enrolando o fio.

Questão 17



Na figura, são mostradas três partículas fixadas e uma quarta partícula pendurada por um fio inextensível. As quatro partículas estão carregadas eletricamente e em equilíbrio nos vértices de um quadrado de lado L .

Dado:

- constante elétrica do meio: k .

Observação:

- as cargas de cada partícula estão indicadas na figura.

A tração no fio é:

A () $2 \frac{kq^2}{L^2}$

B () $\frac{9}{4} \frac{kq^2}{L^2}$

C () $\frac{3}{2} \frac{kq^2}{L^2}$

D () $\frac{1}{4} \frac{kq^2}{L^2} (4 + \sqrt{2})$

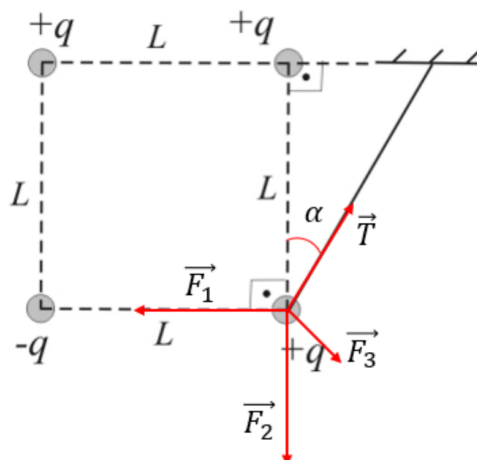
E () $\frac{1}{4} \frac{kq^2}{L^2} (2 + \sqrt{2})$

Gabarito: C

No modelo adotado pelo gabarito, o peso da partícula é desprezado. A tração equilibra a resultante das três forças elétricas, calculadas pela lei de Coulomb.

Etapa 1. Calcule as forças elétricas.

Defina $F = kq^2/L^2$. As cargas vizinhas exercem forças de módulo F , e a carga diagonal, a uma distância $L\sqrt{2}$, exerce força de módulo $F/2$.



A força F_1 aponta para a esquerda, F_2 para baixo e F_3 para baixo e para a direita, a 45° dos eixos.

Etapa 2. Escreva as componentes da tração.

Se α é o ângulo do fio com a vertical, o equilíbrio em cada eixo fornece

$$T \sin \alpha + \frac{F\sqrt{2}}{4} = F,$$

$$T \sin \alpha = F \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right),$$

$$T \cos \alpha = F \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

Etapla 3. Determine o módulo da tração.

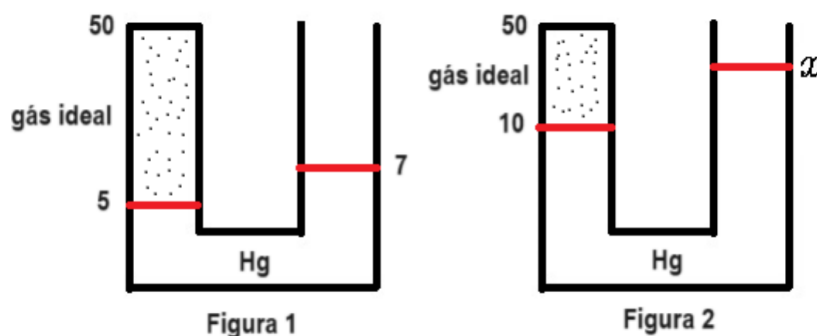
Somando os quadrados das componentes,

$$T^2 = F^2 \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{9}{4} F^2,$$

$$T = \boxed{\frac{3}{2} \frac{kq^2}{L^2}}.$$

Questão 18



Na Figura 1, é apresentado um manômetro de Hg, graduado em cm, que aprisiona uma certa massa de gás ideal em equilíbrio. Adiciona-se uma nova quantidade de Hg pela extremidade aberta do manômetro e, após o novo equilíbrio, obtém-se a configuração da Figura 2.

Sabendo que a temperatura ambiente se manteve constante, desprezando-se qualquer vazamento de gás e sendo 70 cmHg a pressão atmosférica, o valor da graduação x , em cm, é:

A () 30

B () 15

C () 42

D () 21

E () 10

Gabarito: D

As diferenças de nível do mercúrio determinam as pressões do gás. Como a temperatura é constante, a lei de Boyle relaciona os dois estados.

Etapla 1. Determine as pressões e os volumes.

Na Figura 1, a diferença entre os níveis é 2 cm. Pela lei de Stevin,

$$\begin{aligned} P_1 &= 70 \text{ cmHg} + 2 \text{ cmHg} \\ &= 72 \text{ cmHg}. \end{aligned}$$

Na Figura 2, tomando x como o valor numérico da graduação em centímetros, a pressão é $P_2 = (x + 60) \text{ cmHg}$. Se S é a área da seção do tubo, os volumes ocupados pelo gás são $V_1 = S \cdot 45 \text{ cm}$ e $V_2 = S \cdot 40 \text{ cm}$.

Etapla 2. Aplique a lei de Boyle.

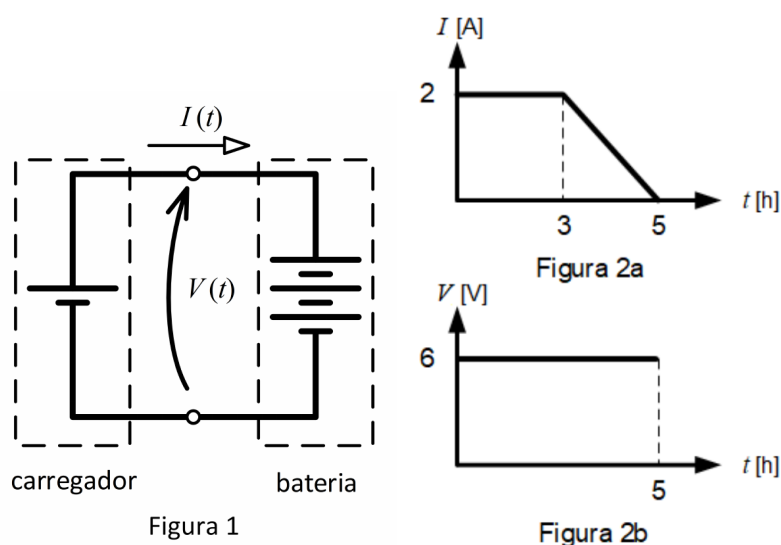
A transformação isotérmica satisfaz $P_1 V_1 = P_2 V_2$. Cancelando a área e usando as mesmas unidades nos dois membros,

$$72 \cdot 45 = (x + 60) \cdot 40,$$

$$x + 60 = 81,$$

$$x = \boxed{21}.$$

A graduação procurada é 21 cm.

Questão 19

Considere um sistema de carga de bateria hipotético, mostrada na Figura 1, no qual os gráficos da corrente $I(t)$ e da tensão $V(t)$ são mostrados nas Figuras 2a e 2b.

Ao longo do período de carga, que é de 5 h, a energia fornecida pelo carregador, em kJ, é:

A () 345,6

B () 172,8

C () 129,6

D () 86,4

E () 36,0

Gabarito: B

Com tensão constante, a energia fornecida é o produto da tensão pela carga transferida. Essa carga corresponde à área sob o gráfico da corrente.

Etapla 1. Calcule a carga transferida.

A área sob $I(t)$ é a soma de um retângulo, nas três primeiras horas, com um triângulo, nas duas horas finais:

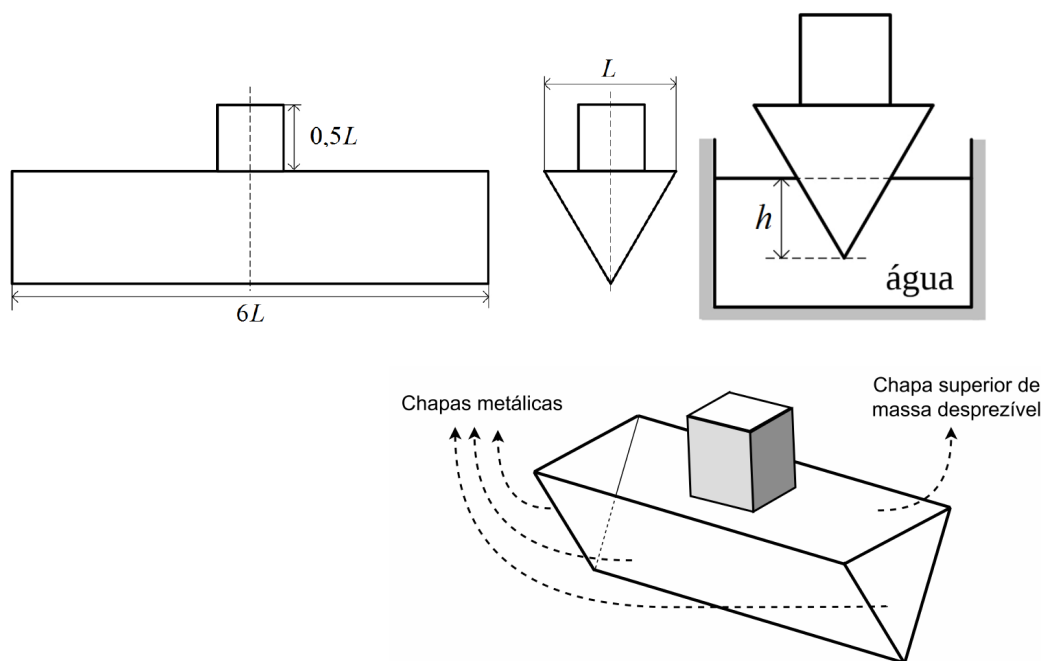
$$\begin{aligned} Q &= 2 \text{ A} \cdot 3 \text{ h} + \frac{2 \text{ A} \cdot 2 \text{ h}}{2} \\ &= 8 \text{ Ah.} \end{aligned}$$

Etapla 2. Calcule a energia fornecida.

Como $V = 6 \text{ V}$ durante toda a carga e $1 \text{ Wh} = 3,6 \text{ kJ}$,

$$\begin{aligned}
 E &= VQ \\
 &= 6\text{ V} \cdot 8\text{ Ah} \\
 &= 48\text{ Wh} \\
 &= \boxed{172,8\text{ kJ}}.
 \end{aligned}$$

Questão 20



Para simular o protótipo de um navio, um engenheiro constrói um prisma reto, com seção reta no formato de um triângulo equilátero, a partir de quatro chapas metálicas (duas triangulares de lado L , duas retangulares $6L \times L$) e uma chapa retangular superior de massa desprezível e dimensões $6L \times L$. A estrutura encontra-se bem vedada e contém ar em seu interior. Uma carga cúbica de aresta $0,5L$ é fixada simetricamente sobre o prisma e em conformidade com as figuras. Em seguida, a estrutura (prisma + carga) é colocada numa piscina, afundando h .

Dados:

- massa específica superficial das chapas metálicas: 8 kg/m^2 ;
- massa específica volumétrica da carga cúbica: 240 kg/m^3 ;
- massa específica da água: 1000 kg/m^3 ;
- $L = 20\text{ cm}$;
- $\sqrt{3} \simeq 1,7$;
- $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,68$.

Supondo que a estrutura flutue de forma equilibrada, o valor de h , em centímetros, pode ser arredondado para:

A () 8

B () 10

C () 12

D () 14

E () 16

Gabarito: A

Na flutuação em equilíbrio, o empuxo iguala o peso do conjunto. As massas das chapas e da carga determinam o volume submerso, que depende de h .

Etapla 1. Calcule as massas das chapas e da carga.

Com $L = 0,2 \text{ m}$, a massa de uma chapa triangular é

$$\begin{aligned} M_{\triangle} &= \sigma \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= 8 \text{ kg/m}^2 \cdot \frac{(0,2 \text{ m})^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{25} \text{ kg.} \end{aligned}$$

Para uma chapa retangular e para a carga cúbica, respectivamente,

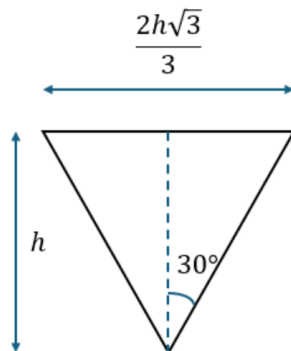
$$\begin{aligned} M_{\text{ret}} &= \sigma \cdot 6L^2 \\ &= 8 \text{ kg/m}^2 \cdot 6(0,2 \text{ m})^2 \\ &= 1,92 \text{ kg,} \\ M_{\text{carga}} &= \rho_{\text{carga}} (0,5L)^3 \\ &= 240 \text{ kg/m}^3 \cdot (0,1 \text{ m})^3 \\ &= 0,24 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Somando duas chapas de cada formato e a carga, com $\sqrt{3} \simeq 1,7$,

$$\begin{aligned} M &= 2M_{\triangle} + 2M_{\text{ret}} + M_{\text{carga}} \\ &\simeq 0,272 \text{ kg} + 3,84 \text{ kg} + 0,24 \text{ kg} \\ &= 4,352 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Etapla 2. Expresse o volume submerso em função de h .

A seção submersa é triangular, com altura h e base $2h\sqrt{3}/3$.



Multiplicando sua área pelo comprimento $6L$ do prisma,

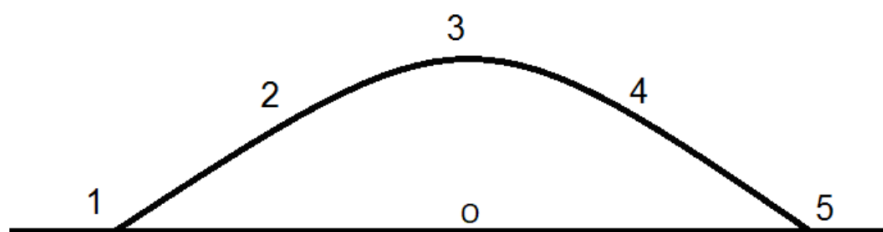
$$\begin{aligned} V_{\text{sub}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot h \cdot 6L \\ &= 2\sqrt{3}Lh^2 \\ &\simeq (0,68 \text{ m})h^2. \end{aligned}$$

Etapla 3. Aplique o equilíbrio de flutuação.

De $\rho_{\text{água}} V_{\text{sub}} g = Mg$, segue que

$$\begin{aligned} h^2 &\simeq \frac{4,352 \text{ kg}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,68 \text{ m}} \\ &= 0,0064 \text{ m}^2, \\ h &\simeq \boxed{8 \text{ cm}}. \end{aligned}$$

Questão 21



Uma fonte sonora é lançada do ponto 1 indicado na figura e segue uma trajetória balística parabólica emitindo um tom de frequência constante f_f . Sejam f_1 a f_5 as frequências percebidas pelo observador “o” quando a fonte passa pelos pontos de 1 a 5, respectivamente, indicados na figura.

Observações:

- os pontos 1 e 5 estão no mesmo plano horizontal;
- os pontos 2 e 4 estão na mesma altitude;
- o ponto 3 é o de maior altitude na trajetória;
- o ponto 1 é aquele imediatamente depois do lançamento;
- o ponto 5 é aquele imediatamente antes do choque com o plano horizontal;
- o observador “o” está na mesma vertical do ponto 3;
- a fonte emite em todas as direções;
- considere a velocidade da fonte muito menor que a do som.

Desta forma, podemos afirmar que:

A () $f_1 \geq f_2 \geq f_3 = f_f \geq f_4 \geq f_5$

B () $f_1 = f_5 \geq f_2 = f_4 \geq f_3 = f_f$

C () $f_1 = f_5 \leq f_2 = f_4 \leq f_3 = f_f$

D () $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4 \geq f_5 \geq f_f$

E () $f_1 = f_5 \leq f_3 = f_f \leq f_2 = f_4$

Gabarito: A

A frequência percebida depende da componente da velocidade da fonte na direção do observador. A comparação segue a aproximação e o afastamento representados na figura.

Etapa 1. Relacione a frequência à velocidade radial.

Seja v_r a componente da velocidade da fonte dirigida ao observador, positiva na aproximação. Para observador parado e velocidade do som V_s ,

$$f = f_f \frac{V_s}{V_s - v_r},$$

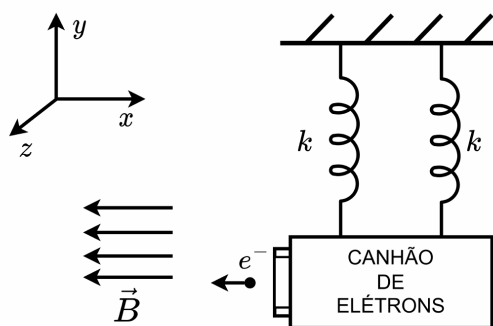
Quanto maior v_r , maior a frequência percebida.

Etapa 2. Compare os pontos simétricos da trajetória.

Na figura, a aproximação é maior em 1 que em 2: $f_1 \geq f_2 \geq f_f$. Por simetria, o afastamento é maior em 5 que em 4: $f_f \geq f_4 \geq f_5$. Em 3, a velocidade é horizontal e a direção até o observador é vertical. Logo, $v_r = 0$ e $f_3 = f_f$. A ordenação é

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 = f_f \geq f_4 \geq f_5.$$

Questão 22



Na figura, é apresentado um canhão oscilando preso ao teto por duas molas e disparando continuamente elétrons numa região sujeita a um campo magnético constante.

Dados:

- constante elástica de cada mola: k ;
- amplitude de oscilação do canhão / par de molas: A ;
- direção de oscilação do canhão / par de molas: y ;
- vetor campo magnético: $(-B, 0, 0)$;
- velocidade relativa de disparo dos elétrons em relação ao canhão: $(-v, 0, 0)$;
- massa do elétron: m ;
- massa do canhão: M ;
- carga do elétron: $-e$.

Observações:

- o canhão oscila no plano xy ;
- a velocidade inicial de um elétron disparado é obtida ao se somarem vetorialmente os efeitos da oscilação e do canhão parado;
- despreze o efeito gravitacional no movimento dos elétrons;
- $m \ll M$;
- despreze as interações elétricas entre os elétrons.

Nas condições acima, a maior coordenada z que algum elétron pode alcançar é:

A () $\frac{mA\sqrt{2k\frac{A^2}{M} + v^2}}{eB}$
 B () $\frac{m\sqrt{k\frac{A^2}{M} + v^2}}{eB}$
 C () $\frac{mA\sqrt{2\frac{k}{M}}}{eB}$
 D () $\frac{mA\sqrt{\frac{k}{M}}}{eB}$
 E () $\frac{2mA\sqrt{2\frac{k}{M}}}{eB}$

Gabarito: E

A componente da velocidade paralela ao campo magnético não altera o raio da hélice. O maior deslocamento em z depende da velocidade vertical máxima do canhão.

Etapas 1. Determine o raio do movimento helicoidal.

Se v_y é a velocidade vertical do canhão no instante do disparo, a componente perpendicular ao campo tem módulo $|v_y|$. Logo,

$$R = \frac{m|v_y|}{eB}.$$

O elétron parte de $z = 0$. Quando o canhão desce, a força magnética inicial aponta para $z > 0$, e a maior coordenada atingida é $2R$.

Etapa 2. Calcule a velocidade vertical máxima.

As duas molas estão em paralelo, com constante equivalente $2k$. Assim,

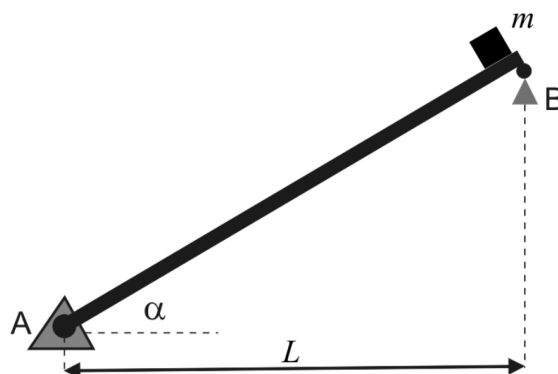
$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{2k}{M}}, \\ |v_y|_{\text{máx}} &= \omega A \\ &= A\sqrt{\frac{2k}{M}}.\end{aligned}$$

Etapa 3. Determine a maior coordenada z .

Substituindo a velocidade máxima no diâmetro da hélice,

$$\begin{aligned}z_{\text{máx}} &= \frac{2m|v_y|_{\text{máx}}}{eB} \\ &= \frac{2mA\sqrt{2k/M}}{eB}.\end{aligned}$$

Questão 23



A figura mostra uma rampa inclinada, de massa desprezível, apoiada por dois suportes fixados nos pontos A e B. O apoio em A admite forças horizontais e verticais e o apoio em B apenas forças verticais. Um objeto de dimensões desprezíveis é liberado do ponto B a partir do repouso e se desloca sem atrito em direção a A.

Dados:

- aceleração da gravidade: g ;
- massa do objeto: m ;
- ângulo da rampa com a horizontal: α ;
- comprimento horizontal da rampa: L .

O módulo da reação de apoio em A quando o objeto estiver passando pelo meio da rampa é igual a:

A () $\frac{1}{2}mg(\cos \alpha + \sin \alpha)$

B () $\frac{1}{2}mg$

C () $\frac{1}{2}mg \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}$

D () $\frac{1}{2}mg \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha}$

E () $\frac{1}{2}mg \cos \alpha$

Gabarito: B

O bloco exerce uma força normal no ponto médio da rampa. O equilíbrio de forças e de torques da rampa permite calcular as componentes da reação em A.

Etapas 1. Determine a componente horizontal.

Como não há aceleração perpendicular à rampa, a normal tem módulo $N = mg \cos \alpha$. A componente horizontal da reação em A, dirigida para a esquerda, tem módulo

$$\begin{aligned} A_x &= N \sin \alpha \\ &= mg \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{mg}{2} \sin(2\alpha). \end{aligned}$$

Etapas 2. Determine a componente vertical.

Tomando os torques em relação a B e considerando A_y positivo para cima,

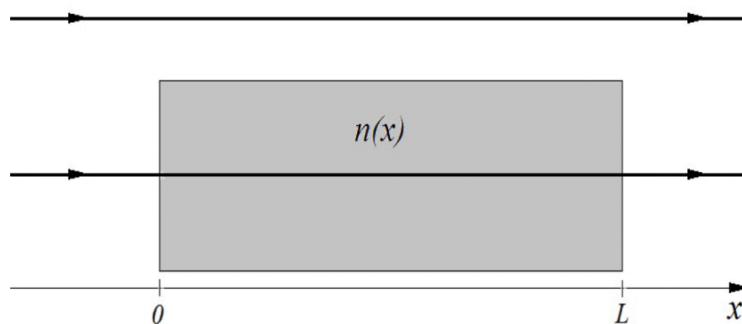
$$\begin{aligned} N \frac{L}{2 \cos \alpha} &= A_y L + A_x L \tan \alpha, \\ \frac{mg}{2} &= A_y + A_x \tan \alpha, \\ A_y &= \frac{mg}{2} - mg \sin^2 \alpha \\ &= \frac{mg}{2} \cos(2\alpha). \end{aligned}$$

Etapas 3. Calcule o módulo da reação.

Somando os quadrados das componentes,

$$\begin{aligned} R_A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ &= \frac{mg}{2} \sqrt{\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)} \\ &= \boxed{\frac{mg}{2}}. \end{aligned}$$

Questão 24



Dois feixes de luz em fase se propagam no vácuo para a direita paralelamente ao eixo x desenhado na figura. Um dos feixes atravessa um bloco com a forma de um paralelepípedo, em cujo meio o índice de refração é variável, provocando uma diminuição de velocidade e consequente atraso no tempo de viagem.

Dados:

- comprimento de onda do feixe de luz no vácuo: λ ;
- comprimento do paralelepípedo: L ;
- índice de refração no interior do paralelepípedo: $n(x) = \sqrt{\frac{2L}{L+x}}$; $0 \leq x \leq L$.

O menor valor de L , para que a interferência entre os feixes, em um anteparo à direita do bloco, seja destrutiva, é:

A () $\frac{\lambda}{2(2+3\sqrt{2})}$
 B () $\frac{\lambda}{3(2\sqrt{2}-2)}$
 C () $\frac{\lambda}{3(2-\sqrt{2})}$
 D () $\frac{\lambda}{2(3+2\sqrt{2})}$
 E () $\frac{\lambda}{2(3-2\sqrt{2})}$

Gabarito: E

A dependência do índice de refração com a posição permite obter o tempo de travessia. A interferência destrutiva ocorre quando o atraso corresponde a um número ímpar de meios períodos.

Etapa 1. Relacione a velocidade à posição.

No bloco, a velocidade de propagação é $v = c/n$. Assim,

$$v = c\sqrt{\frac{L+x}{2L}},$$

$$v^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2L}x.$$

Comparando com $v^2 = v_0^2 + 2ax$, a propagação pode ser tratada pela cinemática de aceleração constante, com $v_0 = c/\sqrt{2}$, $v_f = c$ e $a = c^2/(4L)$.

Etapa 2. Calcule o atraso de travessia.

O tempo no bloco é

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{v_f - v_0}{a} \\ &= \frac{c(1 - 1/\sqrt{2})}{c^2/(4L)} \\ &= \frac{L}{c}(4 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

No vácuo, o mesmo percurso leva $\Delta t_2 = L/c$. Logo,

$$\begin{aligned}\Delta t &= \Delta t_1 - \Delta t_2 \\ &= \frac{L}{c}(3 - 2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Etapa 3. Imponha a oposição de fase.

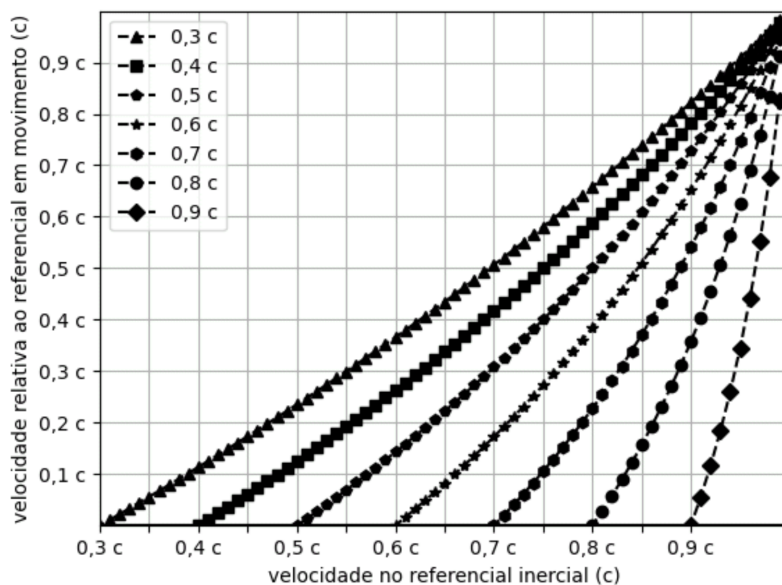
Para interferência destrutiva, $\Delta t = kT/2$, com k inteiro positivo ímpar. Usando $T = \lambda/c$,

$$\begin{aligned}\frac{L}{c}(3 - 2\sqrt{2}) &= \frac{k\lambda}{2c}, \\ L &= \frac{k\lambda}{2(3 - 2\sqrt{2})}.\end{aligned}$$

O menor valor corresponde a $k = 1$:

$$L_{\min} = \frac{\lambda}{2(3 - 2\sqrt{2})}.$$

Questão 25



Na figura, é mostrada a transformação de Lorentz para diversas velocidades ($0,3c$ a $0,9c$) de um referencial em movimento em relação a um referencial inercial. Essa transformação é usada para calcular a velocidade relativa (eixo vertical) de um outro objeto se movimentando no mesmo sentido do referencial que está em alta velocidade ($0,3c$ a $0,9c$). Repare que o eixo horizontal exibe uma escala de velocidade em relação ao referencial inercial e o eixo vertical informa a velocidade relativa entre objeto e referencial em movimento.

Uma nave X viaja a $0,5c$ e atira um foguete Y, no mesmo sentido de seu movimento, a uma velocidade relativa a X de $0,3c$. Por sua vez, o foguete Y atira um projétil Z, também no mesmo sentido dos movimentos, a uma velocidade relativa a Y de $0,1c$.

Dado:

- velocidade da luz: c .

Em relação ao referencial inercial, a velocidade de Z é aproximadamente:

A () $0,90c$

B () $0,65c$

C () $0,70c$

D () $0,75c$

E () $0,80c$

Gabarito: D

O gráfico deve ser consultado duas vezes: primeiro para obter a velocidade de Y no referencial inercial e depois para obter a velocidade de Z.

Etapa 1. Leia a velocidade de Y.

Na curva correspondente à nave X, com velocidade $0,5c$, a ordenada $0,3c$ corresponde aproximadamente à abscissa $0,7c$. Essa é a velocidade de Y no referencial inercial.

Etapa 2. Leia a velocidade de Z.

Usando agora a curva de $0,7c$, a ordenada $0,1c$ corresponde aproximadamente à abscissa $0,75c$.

Portanto, a leitura gráfica fornece $v_z \approx 0,75c$.

Questão 26

Para simular a órbita $(x(t), y(t))$ do satélite de um planeta, no referencial do planeta, utilizou-se um modelo unidimensional com as seguintes equações:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad y(t) = B \sin(\omega t)$$

onde A , B e ω são constantes e t é o instante de tempo.

Dados:

- massa do planeta: M ;
- massa do satélite: m , onde $m \ll M$;
- constante universal de gravitação: G ;
- $C = \sqrt{A^2 - B^2}$;
- localização do centro do planeta: $(C, 0)$.

A diferença entre a maior e a menor energia potencial gravitacional do satélite é:

- A** () $2AGmM/B^2$ **B** () $CGmM/B^2$ **C** () $2CGmM/A^2$ **D** () $2CGmM/B^2$ **E** () $AGmM/C^2$

Gabarito: D

Eliminando o tempo, obtém-se a elipse descrita pelo satélite. As distâncias mínima e máxima ao foco em que está o planeta determinam os extremos da energia potencial.

Etapa 1. Determine a equação da trajetória.

Das equações paramétricas,

$$\cos^2(\omega t) = \frac{x^2(t)}{A^2},$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{y^2(t)}{B^2}.$$

Somando e usando a identidade trigonométrica fundamental,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

A trajetória é uma elipse de semieixos A e B , com distância focal $C = \sqrt{A^2 - B^2}$.

Etapa 2. Identifique as distâncias extremas ao planeta.

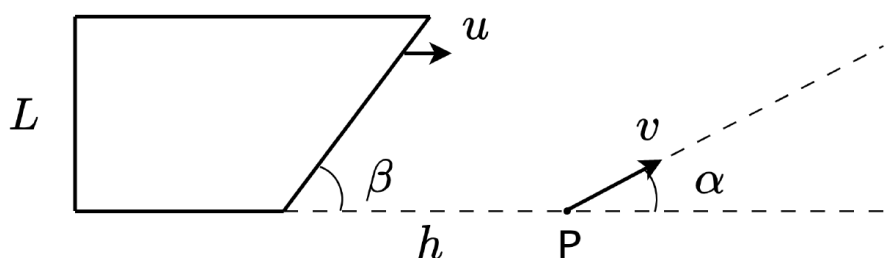
Como o planeta está no foco $(C, 0)$, as distâncias mínima e máxima são $A - C$ e $A + C$, respectivamente. A energia potencial $U = -GMm/r$ é máxima na maior distância e mínima na menor.

Etapa 3. Calcule a diferença de energia potencial.

Subtraindo os valores extremos,

$$\begin{aligned}\Delta U &= -\frac{GMm}{A+C} + \frac{GMm}{A-C} \\ &= GMm \left(\frac{1}{A-C} - \frac{1}{A+C} \right) \\ &= \frac{2CGMm}{A^2 - C^2} \\ &= \boxed{\frac{2CGmM}{B^2}}.\end{aligned}$$

Questão 27



Um trapézio retângulo desloca-se para a direita à velocidade escalar constante u . No instante inicial, um de seus vértices está à distância h do ponto P. Ainda nesse instante, um objeto parte do ponto P à velocidade constante v , indicada na figura juntamente com outras grandezas.

O valor mínimo de v para que o objeto não seja atingido pelo trapézio, onde $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, é:

A () $\frac{u}{\sin(\beta - \alpha)/\sin \beta + h \sin \alpha/L}$

B () $\frac{u \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + h \sin \alpha/L}$

C () $\frac{u \sin \beta}{\sin \beta + h \sin \alpha/L}$

D () $\frac{u \sin \beta}{\sin(\beta + \alpha) + h \sin \alpha/L}$

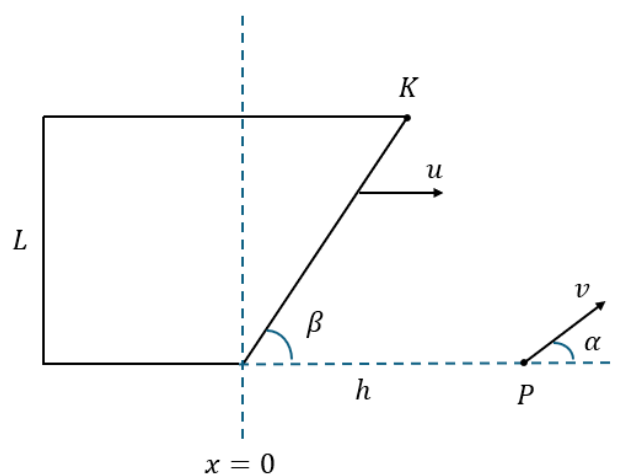
E () $\frac{u}{\cos \alpha + h \sin \alpha \cos \beta/L}$

Gabarito: A

No caso limite, o objeto passa rente ao vértice superior direito do trapézio. Igualar as posições nesse instante fornece a velocidade mínima.

Etapa 1. Escreva as posições do vértice e do objeto.

Adote a origem no vértice inferior direito do trapézio no instante inicial e chame o vértice superior direito de K.



As coordenadas de K são

$$x_K(t) = \frac{L}{\tan \beta} + ut,$$

$$y_K(t) = L.$$

Para o objeto que parte de P ,

$$x(t) = h + vt \cos \alpha,$$

$$y(t) = vt \sin \alpha.$$

Etapla 2. Determine o instante de passagem pelo vértice.

O objeto atinge a altura L no instante

$$t = \frac{L}{v \sin \alpha}.$$

Nesse instante, a igualdade das abscissas fornece

$$h + vt \cos \alpha = \frac{L}{\tan \beta} + ut,$$

$$h + \frac{L}{\tan \alpha} = \frac{L}{\tan \beta} + \frac{uL}{v \sin \alpha}.$$

Etapla 3. Isole a velocidade mínima.

Multiplicando por $\sin \alpha / L$ e reorganizando,

$$\frac{u}{v} = \frac{h \sin \alpha}{L} + \cos \alpha - \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$= \frac{h \sin \alpha}{L} + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}.$$

Logo,

$$v_{\min} = \boxed{\frac{u}{\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta} + \frac{h \sin \alpha}{L}}}.$$

Questão 28

Uma lente convergente é construída usando um material de índice de refração n , podendo a sua distância focal f ser calculada usando a equação dos fabricantes de lentes. Um objeto é posicionado no eixo da lente e muito distante da mesma.

Observações:

- f é proporcional a $(n - 1)^{-1}$;
- $n > 1$;
- seja x tal que $|x| \ll 1$, então $(1 - x)^{-1} \simeq 1 + x$.

Caso haja uma ínfima variação na constituição do índice de refração do material ($n \rightarrow n + \Delta n$), a variação Δi na posição final da imagem do objeto ($i \rightarrow i + \Delta i$) é, aproximadamente:

- A () $f\Delta n/n$ B () $f\Delta n/(n - 1)$ C () $-f\Delta n/(n - 1)$ D () $-f\Delta n/(n^2 - 1)$ E () $f\Delta n/(n^2 - 1)$

Gabarito: C

Para um objeto muito distante, a imagem se forma no foco. Portanto, basta calcular a variação da distância focal causada pela pequena mudança do índice de refração.

Etapa 1. Expresse a nova distância focal.

Seja K a constante que depende da geometria da lente. Como $f = K/(n - 1)$,

$$\begin{aligned} f' &= \frac{K}{n - 1 + \Delta n} \\ &= \frac{K}{n - 1} \left(1 + \frac{\Delta n}{n - 1} \right)^{-1} \\ &= f \left(1 + \frac{\Delta n}{n - 1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Etapa 2. Aplique a aproximação para pequenas variações.

Para $|\Delta n| \ll n - 1$, a aproximação fornecida dá

$$\begin{aligned} f' &\simeq f \left(1 - \frac{\Delta n}{n - 1} \right), \\ \Delta f &= f' - f \\ &\simeq -\frac{f\Delta n}{n - 1}. \end{aligned}$$

Como $\Delta i = \Delta f$, a variação pedida é

$$\Delta i \simeq -\frac{f\Delta n}{n - 1}.$$



Questão 29

Em uma prática de laboratório, a superfície externa de uma parede é integralmente recoberta com um material isolante térmico. Por sua vez, a superfície interna encontra-se exposta a uma chama.

Dados:

- condutividade térmica da parede: $3 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$;
- condutividade térmica do material isolante: $0,02 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$;
- espessura da parede: 15 cm ;
- espessura do material isolante: 4 mm ;
- temperatura na superfície livre do isolante: 45°C ;
- temperatura na superfície da parede em contato com a chama: 295°C ;
- calor latente de fusão do gelo: 336 J/g ;
- dimensões da parede e da camada isolante: $2 \text{ m} \times 0,84 \text{ m}$.

A massa de gelo máxima, em kg, que a energia incidente na parede é capaz de fundir em uma hora de experimento é:

A () 1,5

B () 1,8

C () 15

D () 18

E () 20

Gabarito: D

Em regime estacionário, a mesma potência térmica atravessa a parede e o isolante. Essa potência, multiplicada pelo tempo, fornece a energia disponível para fundir o gelo.

Etapa 1. Calcule a potência térmica transmitida.

Seja T a temperatura na interface. Pela lei de Fourier, as duas camadas satisfazem

$$\phi = \frac{k_1 A (T_{\text{quente}} - T)}{e_1},$$
$$\phi = \frac{k_2 A (T - T_{\text{fria}})}{e_2}.$$

Somando as quedas de temperatura, a interface é eliminada:

$$\phi = \frac{A(T_{\text{quente}} - T_{\text{fria}})}{e_1/k_1 + e_2/k_2}.$$

A área é $A = 1,68 \text{ m}^2$ e a diferença de temperatura é 250 K . Convertendo as espessuras para metros,

$$\phi = \frac{1,68 \text{ m}^2 \cdot 250 \text{ K}}{\frac{0,15 \text{ m}}{3 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} + \frac{0,004 \text{ m}}{0,02 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}}$$
$$= 1680 \text{ W}.$$

Etapa 2. Determine a massa de gelo fundida.

Para a massa máxima, toda a energia é empregada na fusão. Com $L_f = 336 000 \text{ J/kg}$,

$$m = \frac{\phi \Delta t}{L_f}$$
$$= \frac{1680 \text{ J/s} \cdot 3600 \text{ s}}{336 000 \text{ J/kg}}$$
$$= \boxed{18 \text{ kg}}.$$

Questão 30

Em uma determinada região esférica do espaço, a distribuição volumétrica de cargas é tal que o campo elétrico em seu interior é o vetor $E(r)\hat{u}_r$, onde $\hat{u}_r$ é o vetor unitário na direção radial e $E(r)$, em V/m, é igual a:

$$E(r) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{3r\pi}{2R}\right) + \frac{(2-r)^2}{R} - 1, & 0 \leq r \leq R; \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

em que A é uma constante, r é a distância até o centro da esfera e R é o raio da esfera, em metros.

Observação:

- $R < 3$ m.

Com as condições impostas acima, a constante A , em V/m, necessariamente é:

A () -2

B () 2

C () -3

D () 3

E () 0

Gabarito: C

A regularidade do campo no centro e sua continuidade na superfície da distribuição volumétrica fornecem duas condições. Elas determinam o raio R , em seguida, a constante A .

Etapa 1. Imponha campo nulo no centro.

Pela simetria esférica de uma distribuição regular, o campo no centro é nulo. Usando os valores numéricos em unidades do SI,

$$\begin{aligned} A \cos 0 + \frac{4}{R} - 1 &= 0, \\ A &= 1 - \frac{4}{R}. \end{aligned}$$

Etapa 2. Determine o raio da esfera.

Como não há uma camada superficial de carga no modelo, o campo é contínuo em $r = R$ e coincide com o campo externo nulo. Como $\cos(3\pi/2) = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{(2-R)^2}{R} - 1 &= 0, \\ R^2 - 5R + 4 &= 0, \\ (R-1)(R-4) &= 0. \end{aligned}$$

A condição $R < 3$ m seleciona $R = 1$ m.

Etapa 3. Calcule a constante A .

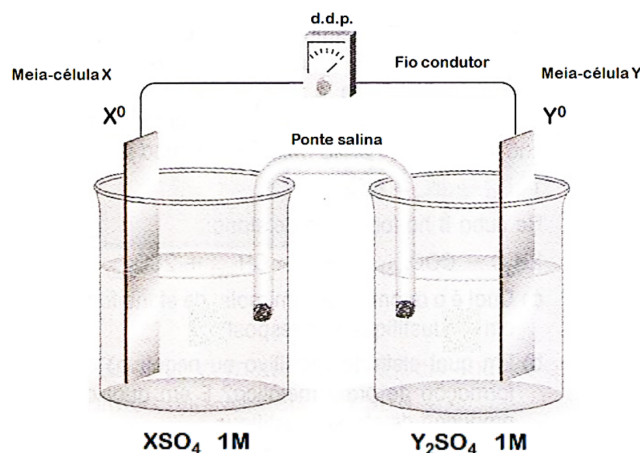
Substituindo o valor numérico do raio na relação obtida no centro,

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{4}{1} \\ &= \boxed{-3 \text{ V/m}}. \end{aligned}$$

GABARITO QUÍMICA

Questão 31

A figura a seguir mostra esquematicamente um dispositivo eletroquímico composto pelas meias-células X e Y.

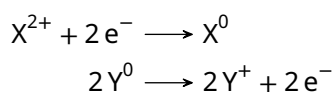


Dados: Potenciais-padrão de redução das espécies químicas envolvidas.

$E_X^o = -1,85 \text{ V}$	$E_Y^o = -2,93 \text{ V}$
---------------------------	---------------------------

Com base no esquema eletroquímico apresentado na figura e nos dados fornecidos, analise as proposições a seguir na condição do circuito fechado.

- I. A semirreação representada pela equação estequiométrica $X^0 \longrightarrow X^{2+} + 2e^-$ é espontânea por ser de oxidação.
- II. O fluxo de elétrons ocorre no sentido horário, indo do anodo para catodo.
- III. A corrente iônica circula pelos eletrodos e fios metálicos.
- IV. O eletrodo da meia-célula X é o catodo onde ocorre reação de redução.
- V. As reações eletroquímicas podem ser representadas pelas seguintes equações estequiométricas:



A opção que apresenta APENAS afirmativas verdadeiras é:

- A** () I e III. **B** () II, III e IV. **C** () I e V. **D** () IV e V. **E** () II e V.

Gabarito: D

A comparação dos potenciais de redução identifica o catodo e o anodo. Como o potencial de X é maior que o de Y, X se reduz e Y se oxida no funcionamento espontâneo da célula.

Etapa 1. Proposição I: Incorreta

A espontaneidade não decorre apenas de uma semirreação ser de oxidação. No dispositivo dado, é Y que se oxida; X sofre redução.

Etapa 2. Proposição II: Incorreta

Os elétrons fluem pelo circuito externo do anodo Y para o catodo X. Na figura, o fluxo ocorre da direita para a esquerda no fio superior, em sentido anti-horário.

Etapa 3. Proposição III: Incorreta

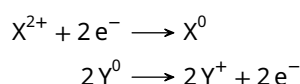
A corrente iônica circula pelas soluções e pela ponte salina. Nos eletrodos e fios metálicos, os portadores de carga são elétrons.

Etapa 4. Proposição IV: Correta

O eletrodo X é o catodo, pois nele ocorre a redução de X^{2+} a X^0 .

Etapa 5. Proposição V: Correta

As semirreações indicadas correspondem à redução no catodo e à oxidação no anodo:



Portanto, são verdadeiras **IV e V**, correspondentes à alternativa D.

Questão 32

Uma mistura de um monoácido orgânico e um monoálcool primário, em uma proporção molar 1:2, foi tratada com uma quantidade catalítica de ácido sulfúrico concentrado sob condições de volume e temperatura constantes. Após um período de reação suficientemente longo, em um sistema fechado, foi observado que a reação apresentou uma conversão de 87,5 % do monoácido.

Se o mesmo tratamento for aplicado a uma mistura equimolar desses mesmos compostos, a conversão esperada do monoácido e o grupo funcional do produto principal serão:

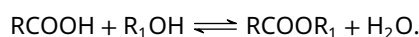
- A** () 67,2 %; éster. **B** () 67,2 %; éter. **C** () 70,0 %; éster. **D** () 70,0 %; éter. **E** () 87,5 %; éster.

Gabarito: C

A esterificação forma éster e água. A conversão do primeiro experimento determina a constante de equilíbrio, que permite calcular a conversão da mistura equimolar.

Etapa 1. Monte o equilíbrio do primeiro experimento.

Representando os grupos orgânicos do ácido e do álcool por R e R_1 , a reação é



Para quantidades iniciais de 1 mol de ácido e 2 mol de álcool, a conversão de 87,5 % fornece:

Quantidade de matéria / mol	Ácido	Álcool	Éster	Água
Inicial	1	2	0	0
Consumida ou formada	-0,875	-0,875	+0,875	+0,875
No equilíbrio	0,125	1,125	0,875	0,875

Como os fatores de volume se cancelam na expressão de K,

$$\begin{aligned} K &= \frac{[RCOOR_1][H_2O]}{[RCOOH][R_1OH]} \\ &= \frac{0,875 \cdot 0,875}{0,125 \cdot 1,125} \\ &= \frac{49}{9}. \end{aligned}$$

Etapla 2. Determine a conversão da mistura equimolar.

Tomando 1 mol de cada reagente e chamando de x a fração convertida, no equilíbrio há $(1 - x)$ mol de cada reagente e x mol de cada produto.

A temperatura é a mesma, portanto K não muda:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(1-x)^2} &= \frac{49}{9}, \\ \frac{x}{1-x} &= \frac{7}{3}, \\ 3x &= 7 - 7x, \\ x &= 0,7.\end{aligned}$$

A conversão e a função orgânica pedidas são 70,0%; éster.

Questão 33

Para uma solução aquosa contendo sacarose em m kg de água, a diferença entre as temperaturas de ebulição e de congelamento, à pressão de 1 atm, é de ΔT em K. A massa molar da sacarose é M g mol⁻¹ e as constantes ebulioscópica e crioscópica da água são, respectivamente, K_e e K_c , expressas em K kg mol⁻¹.

A expressão que indica o valor da massa de sacarose em gramas, na solução, é:

- A** () $Mm(\Delta T - 100)/(K_e + K_c)$
 B () $2Mm\Delta T/(K_e + K_c)$
 C () $Mm\Delta T/(K_e - K_c)$
D () $2Mm(\Delta T - 100)/(K_e - K_c)$
 E () $Mm(\Delta T - 50)/(K_e + K_c)$

Gabarito: A

A sacarose eleva a temperatura de ebulição e reduz a de congelamento. Somando esses dois efeitos, obtém-se a massa do soluto a partir da diferença total de temperaturas.

Etapla 1. Expresse as variações de temperatura.

Seja m_s o valor numérico da massa de sacarose em gramas. Com as unidades dadas no enunciado, a molalidade é $w = m_s/(Mm)$.

As relações ebulioscópica e crioscópica são

$$\begin{aligned}T_e - T_e^* &= K_e \frac{m_s}{Mm}, \\ T_c^* - T_c &= K_c \frac{m_s}{Mm},\end{aligned}$$

em que o asterisco identifica o solvente puro.

Etapla 2. Some os efeitos e isole a massa.

A diferença entre as temperaturas de ebulição e congelamento da água pura a 1 atm é 100 K. Somando as relações anteriores e usando os valores numéricos em kelvins,

$$\begin{aligned}(T_e - T_c) - (T_e^* - T_c^*) &= \frac{m_s}{Mm}(K_e + K_c), \\ \Delta T - 100 &= \frac{m_s}{Mm}(K_e + K_c), \\ m_s &= \frac{Mm(\Delta T - 100)}{K_e + K_c}.\end{aligned}$$

A expressão fornece a massa em gramas, conforme as unidades especificadas.

Questão 34

Uma solução foi preparada com 1800 g de ácido sulfúrico puro e 2000 L de água deionizada, sendo, em seguida, eletrolisada. Uma amostra de 100 mL da solução resultante foi titulada com solução-padrão 0,1 M de hidróxido de sódio, tendo sido necessários 20,4 mL dessa solução para neutralizar a amostra. Considere que a massa específica do ácido sulfúrico vale 1800 g L^{-1} e que misturas desse ácido em água se comportam idealmente no que se refere ao volume de mistura.

A alternativa que contém o volume aproximado de gás gerado na eletrólise, em m^3 , medido nas CNTP, é:

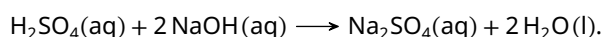
- A () 187,5
 B () 250
 C () 375
 D () 500
 E () Não é gerado gás algum e a solução apenas aquece pela passagem da corrente elétrica.

Gabarito: C

Na eletrólise, a água é consumida e o ácido sulfúrico permanece na solução. A titulação determina a concentração final do ácido e, com ela, o volume de água consumido.

Etapla 1. Calcule a concentração final do ácido.

A neutralização ocorre na proporção de dois mols de base para um mol de ácido:



Assim,

$$\begin{aligned} c_{\text{ácido}} &= \frac{c_{\text{base}} V_{\text{base}}}{2 V_{\text{amostra}}} \\ &= \frac{0,1 \text{ mol/L} \cdot 20,4 \text{ mL}}{2 \cdot 100 \text{ mL}} \\ &= 0,0102 \text{ mol/L.} \end{aligned}$$

Etapla 2. Determine o volume final da solução.

A quantidade de matéria do ácido é conservada. Usando sua massa molar,

$$\begin{aligned} n_{\text{ácido}} &= \frac{1800 \text{ g}}{98 \text{ g/mol}} \\ &\simeq 18,367 \text{ mol,} \\ V_f &= \frac{n_{\text{ácido}}}{c_{\text{ácido}}} \\ &= \frac{1800 \text{ g}}{98 \text{ g/mol} \cdot 0,0102 \text{ mol/L}} \\ &\simeq 1800,72 \text{ L.} \end{aligned}$$

Etapla 3. Calcule a quantidade de água consumida.

O ácido ocupa 1 L, pois sua massa é 1800 g e sua massa específica é 1800 g/L . Pela aditividade dos volumes, $V_i = 2001 \text{ L}$. Logo, o volume de água consumido é

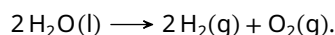
$$\begin{aligned} \Delta V &= V_i - V_f \\ &\simeq 2001 \text{ L} - 1800,72 \text{ L} \\ &\simeq 200,28 \text{ L.} \end{aligned}$$

Adotando a massa específica usual da água, 1 kg/L , e $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ kg/kmol}$,

$$\begin{aligned}
 n_{\text{H}_2\text{O}} &= \frac{\rho_{\text{água}} \Delta V}{M_{\text{H}_2\text{O}}} \\
 &\approx \frac{1 \text{ kg/L} \cdot 200,28 \text{ L}}{18 \text{ kg/kmol}} \\
 &\approx 11,127 \text{ kmol}.
 \end{aligned}$$

Etapa 4. Calcule o volume dos gases nas CNTP.

A eletrólise da água produz três mols de gases para cada dois mols de água:



Usando o volume molar nas CNTP,

$$\begin{aligned}
 V_{\text{gases}} &= \frac{3}{2} n_{\text{H}_2\text{O}} V_m \\
 &\approx \frac{3}{2} \cdot 11,127 \text{ kmol} \cdot 22,4 \text{ m}^3/\text{kmol} \\
 &\approx 373,9 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

A alternativa mais próxima desse volume é 375 m³.

Questão 35

Em todos os seres vivos, as proteínas são um importante grupo de substâncias. Sobre a estrutura das proteínas, analise as afirmativas abaixo.

- I. A estrutura primária de uma proteína é a sequência de alfa-aminoácidos, tais como glicina, alanina e citosina, ligados por ligações peptídicas.
- II. A estrutura secundária é mantida por ligações de hidrogênio entre os grupos —NH e C=O , próximos entre si, na disposição espacial da proteína.
- III. A estrutura terciária é estabilizada por interações hidrofóbicas, hidrofílicas, iônicas e ligações dissulfeto.
- IV. A estrutura quaternária refere-se ao arranjo de múltiplas subunidades polipeptídicas que podem, por ação de agentes químicos ou físicos, ser alteradas ou destruídas através do fenômeno conhecido como desnaturação proteica, perdendo sua atividade biológica.
- V. As proteínas apresentam estruturas geométricas de vários tipos e podem ser caracterizadas pela produção de colorações, como por exemplo, a reação da proteína da pele com ácido nítrico, formando uma coloração azulada.

A opção que apresenta APENAS afirmativas verdadeiras é:

- A** () I e IV.
 B () II e V.
 C () I, II e III.
 D () II, III e IV.
 E () III e V.

Gabarito: D

Cada proposição deve ser comparada à composição das proteínas e às interações responsáveis por seus níveis de organização.

Etapa 1. Proposição I: Incorreta

A estrutura primária é a sequência de aminoácidos unidos por ligações peptídicas. Entretanto, citosina é uma base nitrogenada, não um aminoácido.

Etapa 2. Proposição II: Correta

Ligações de hidrogênio entre os grupos —NH e C=O da cadeia polipeptídica estabilizam estruturas secundárias, como hélices alfa e folhas beta.

Etapa 3. Proposição III: Correta

A estrutura terciária é estabilizada por interações hidrofóbicas, hidrofílicas e iônicas, além de ligações dissulfeto quando presentes.

Etapa 4. Proposição IV: Correta

A estrutura quaternária corresponde ao arranjo de subunidades polipeptídicas. Agentes químicos ou físicos podem alterar suas interações e provocar desnaturação, com perda de atividade biológica.

Etapa 5. Proposição V: Incorreta

A reação xantoproteica, que envolve ácido nítrico e proteínas com resíduos aromáticos, produz coloração amarelada. A coloração azulada indicada na proposição está incorreta.

São verdadeiras **II, III e IV**, correspondentes à alternativa D.

Questão 36

Analise as afirmativas abaixo.

- I. A imersão de limalha de ferro em um béquer aberto contendo uma solução de ácido clorídrico provoca a liberação de bolhas de gás. Nesse processo, não há realização nem recebimento de trabalho.
- II. Uma solução de ácido iodídrico de concentração igual a $1,0 \times 10^{-8}$ mol/L tem pH igual a 8.
- III. Se dois béqueres, um contendo água pura e o outro contendo uma solução insaturada de sacarose, forem submetidos ao aquecimento, a solução de sacarose ebulirá a uma temperatura constante e superior à temperatura de ebulição da água pura.
- IV. Para a reação de combustão completa do gás metano, gerando apenas produtos gasosos, as variações de entalpia e de energia interna têm o mesmo valor.

A única alternativa CORRETA é:

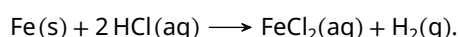
- A () Apenas a afirmativa I é verdadeira. B () Apenas a afirmativa II é verdadeira.
- C () Apenas a afirmativa III é verdadeira. D () Apenas a afirmativa IV é verdadeira.
- E () Todas as afirmativas são falsas.

Gabarito: D

As proposições envolvem trabalho de expansão, acidez, ebulição de soluções e a relação entre entalpia e energia interna.

Etapa 1. Proposição I: Incorreta

A reação libera hidrogênio gasoso:



A formação do gás provoca expansão contra a pressão atmosférica. Portanto, o sistema realiza trabalho.

Etapa 2. Proposição II: Incorreta

Nessa diluição, não se pode calcular o pH usando apenas a concentração de HI: a autoionização da água também contribui para a concentração de H_3O^+ .

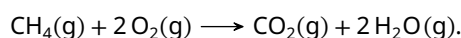
A solução permanece ácida. Na referência usual de 25°C , seu pH é ligeiramente menor que 7, e não igual a 8.

Etapa 3. Proposição III: Incorreta

A sacarose, soluto não volátil, eleva a temperatura de ebulição. Durante a ebulição, a perda de água aumenta a concentração da solução e sua temperatura de ebulição. Assim, essa temperatura não permanece constante.

Etapla 4. Proposição IV: Correta

A combustão completa com produtos gasosos é



Há três mols de gases em cada membro, portanto $\Delta n_{\text{gás}} = 0$. Para gases ideais à mesma temperatura,

$$\begin{aligned}\Delta H &= \Delta U + \Delta n_{\text{gás}} RT \\ &= \Delta U.\end{aligned}$$

Apenas ☐ IV é verdadeira, correspondendo à alternativa D.

Questão 37

Uma mistura dos sais hidratados $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ e $\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$, com massa de 602 kg, é aquecida até a temperatura suficiente para a remoção total da água de hidratação. A massa final da mistura de sais anidros é 242 kg.

Dados:

$M_{\text{H}_2\text{O}} = 18,0 \text{ kg.kmol}^{-1}$	$M_{\text{Na}_2\text{SO}_4} = 142 \text{ kg.kmol}^{-1}$	$M_{\text{Na}_2\text{CO}_3} = 106 \text{ kg.kmol}^{-1}$
--	---	---

A razão molar $\text{Na}_2\text{SO}_4/\text{Na}_2\text{CO}_3$ entre os sais anidros é:

A () 1,34

B () 0,85

C () 1,13

D () 1,41

E () 0,71

Gabarito: E

A perda de massa fornece a quantidade total de água de hidratação. Como os dois sais são decaidratados, essa quantidade fixa a soma de suas quantidades de matéria.

Etapla 1. Determine a quantidade total de sais.

A massa de água removida é

$$\begin{aligned}\Delta m &= 602 \text{ kg} - 242 \text{ kg} \\ &= 360 \text{ kg}.\end{aligned}$$

Sejam n_1 e n_2 as quantidades de sulfato e carbonato, respectivamente. Cada mol de sal libera dez mols de água. Logo,

$$\begin{aligned}n_1 + n_2 &= \frac{\Delta m}{10M_{\text{H}_2\text{O}}} \\ &= \frac{360 \text{ kg}}{10 \cdot 18 \text{ kg/kmol}} \\ &= 2 \text{ kmol}.\end{aligned}$$

Etapla 2. Use a massa dos sais anidros.

A massa final satisfaz

$$(142 \text{ kg/kmol})n_1 + (106 \text{ kg/kmol})n_2 = 242 \text{ kg}.$$

Tomando n_1 e n_2 numericamente em quilomols e substituindo $n_1 = 2 - n_2$,

$$\begin{aligned}
 142(2 - n_2) + 106n_2 &= 242, \\
 284 - 36n_2 &= 242, \\
 n_2 &= \frac{7}{6}, \\
 n_1 &= 2 - \frac{7}{6} \\
 &= \frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule a razão molar.

A razão entre as quantidades dos sais anidros é

$$\begin{aligned}
 \frac{n_1}{n_2} &= \frac{5/6}{7/6} \\
 &= \frac{5}{7} \\
 &\approx \boxed{0,71}.
 \end{aligned}$$

Questão 38

Óxido de ferro II pode ser reduzido a ferro, tanto por carbono, como por monóxido de carbono, de acordo com o mostrado nas equações 1 e 2:

1. $\text{FeO(s)} + \text{C(s)} \longrightarrow \text{Fe(s)} + \text{CO(g)}$
2. $\text{FeO(s)} + \text{CO(g)} \longrightarrow \text{Fe(s)} + \text{CO}_2\text{(g)}$

Os valores de entalpia de formação e de entropia-padrão das substâncias envolvidas em ambas as reações são apresentados na tabela:

	FeO(s)	Fe(s)	C(s)	CO(g)	CO ₂ (g)
ΔH_f° (kJ.mol ⁻¹)	-271,9	0	0	-110,5	-393,5
S° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)	60,8	27,3	5,7	197,9	213,7

Considere um meio reacional fechado onde ocorrem as duas reações e que os valores acima permanecem constantes na faixa de 298 a 650 K.

A ÚNICA alternativa correta é:

- A ()** A reação 1 é exotérmica e a reação 2 é endotérmica.
- B ()** À temperatura aproximada de 627 K, a reação 2 atinge o equilíbrio dinâmico.
- C ()** À temperatura de 450 K, a reação 1 é fonte de calor para sustentar a reação 2 na proporção molar aproximada de 15 para 1.
- D ()** À temperatura de 450 K, ambas as reações são espontâneas.
- E ()** A reação 1 apresenta diminuição de entropia.

Gabarito: B

As variações de entalpia e entropia são calculadas por produtos menos reagentes. Em seguida, a relação $\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$ permite avaliar as alternativas sob a interpretação de condições padrão adotada no gabarito.

Etapa 1. Calcule as grandezas da reação 1.

As entalpias de formação de Fe(s) e C(s) são nulas. Subtraindo as grandezas dos reagentes das dos produtos,

$$\begin{aligned}\Delta H_1^\circ &= [-110,5 - (-271,9)] \text{ kJ/mol} \\ &= 161,4 \text{ kJ/mol}, \\ \Delta S_1^\circ &= [197,9 + 27,3 - 60,8 - 5,7] \\ &\quad \cdot \text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \\ &= 158,7 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.\end{aligned}$$

Etapla 2. Calcule as grandezas da reação 2.

Nesta reação, o CO também integra os reagentes. A soma de suas entalpias de formação é $-382,4 \text{ kJ/mol}$. As entropias somam $258,7 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ nos reagentes e $241,0 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ nos produtos. Logo,

$$\begin{aligned}\Delta H_2^\circ &= [-393,5 - (-382,4)] \text{ kJ/mol} \\ &= -11,1 \text{ kJ/mol}, \\ \Delta S_2^\circ &= [241,0 - 258,7] \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \\ &= -17,7 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.\end{aligned}$$

Etapla 3. Alternativa A: Incorreta

A reação 1 é endotérmica, pois $\Delta H_1^\circ > 0$. A reação 2 é exotérmica, pois $\Delta H_2^\circ < 0$.

Etapla 4. Alternativa B: Correta nas condições padrão

A temperatura em que $\Delta G_2^\circ = 0$ é

$$\begin{aligned}T &= \frac{\Delta H_2^\circ}{\Delta S_2^\circ} \\ &= \frac{-11\,100 \text{ J/mol}}{-17,7 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}} \\ &\simeq 627 \text{ K}.\end{aligned}$$

Nessa temperatura, a constante de equilíbrio é $K = 1$. O equilíbrio efetivo exige também que o quociente reacional seja $Q = 1$; a temperatura, isoladamente, não garante o equilíbrio de qualquer mistura fechada.

Etapla 5. Alternativa C: Incorreta

A reação 1 absorve calor e não pode ser a fonte térmica indicada. É a reação 2, exotérmica, que poderia fornecer calor para a reação 1.

Etapla 6. Alternativa D: Incorreta

A 450 K, convertendo as entropias para $\text{kJ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$,

$$\begin{aligned}\Delta G_1^\circ &= [161,4 - 450 \cdot 0,1587] \text{ kJ/mol} \\ &= 89,985 \text{ kJ/mol}, \\ \Delta G_2^\circ &= [-11,1 - 450 \cdot (-0,0177)] \text{ kJ/mol} \\ &= -3,135 \text{ kJ/mol}.\end{aligned}$$

Nas condições padrão, apenas a reação 2 é espontânea no sentido escrito.

Etapla 7. Alternativa E: Incorreta

A reação 1 apresenta aumento de entropia: $\Delta S_1^\circ = 158,7 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} > 0$.

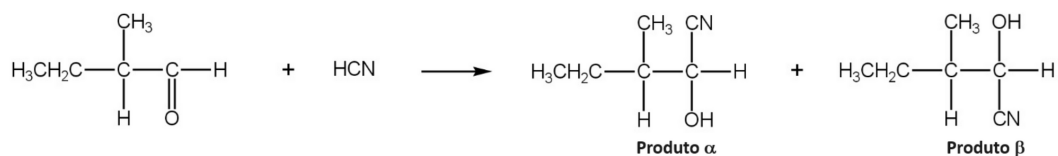
A alternativa indicada pelo gabarito, com a ressalva de condições padrão, é **B**.



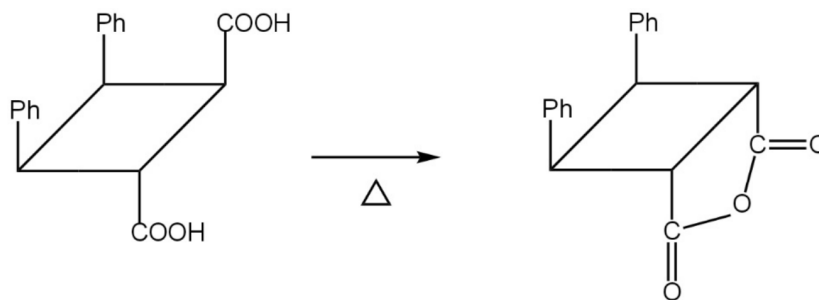
Questão 39

Considere as três propostas de reação a seguir.

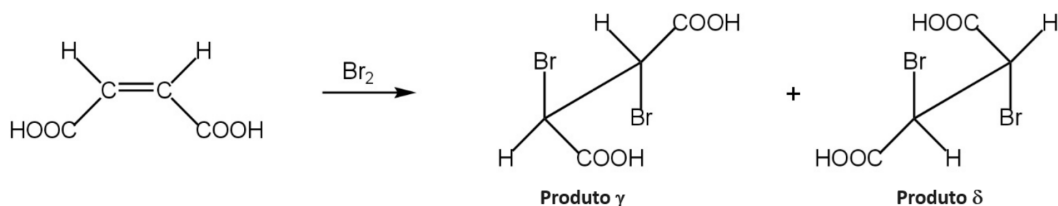
Reação 1:



Reação 2:



Reação 3:



A ÚNICA alternativa correta é:

- A** () Na reação 1, a partir de um reagente opticamente ativo, observa-se nos produtos α e β a formação de um novo centro quiral, implicando produtos opticamente inativos por conterem um par quiral dextrógiro, levógiro.
- B** () A reação 2 não ocorre.
- C** () A reação 2 é uma reação de condensação intramolecular que produz anidrido.
- D** () Na reação 3, os produtos γ e δ são representações de um mesmo composto.
- E** () Na reação 3 o ácido maleico, isômero geométrico do ácido fumárico, reage com bromo produzindo isômeros meso.

Gabarito: B

A análise deve considerar a configuração dos centros quirais e a posição relativa dos grupos que participam de cada reação.

Etapla 1. Alternativa A: Incorreta

O reagente da reação 1 já possui um centro quiral. A adição de HCN à carbonila cria outro centro, enquanto o centro original mantém sua configuração nos dois produtos.

Assim, α e β são diastereoisômeros. Eles não constituem o par de enantiômeros necessário para caracterizar uma mistura racêmica; a inatividade óptica alegada não decorre da formação desse par.

Etapla 2. Alternativa B: Correta

Na reação 2, os grupos carboxílicos estão em posição *trans* no anel de ciclobutano, em faces opostas. Essa disposição impede a condensação intramolecular que produziria o anidrido cíclico representado.

Etapla 3. Alternativa C: Incorreta

A reação 2 não ocorre como proposta, pois a disposição espacial dos grupos carboxílicos impede a formação desse anidrido.

Etapla 4. Alternativa D: Incorreta

O ácido maleico apresenta os grupos carboxílicos em posição *cis*. A adição de Br_2 ocorre por adição *anti* e produz um par de enantiômeros. Logo, γ e δ são compostos distintos, não representações do mesmo composto.

Etapla 5. Alternativa E: Incorreta

Os produtos da reação 3 são enantiômeros, e não compostos meso. Para essa reação de adição *anti*, o composto meso seria obtido a partir do ácido fumárico, o isômero *trans*.

A única alternativa correta é **B**.

Questão 40

Com relação à série de decaimento radioativo do ${}^{238}_{92}\text{U}$ até o ${}^{206}_{82}\text{Pb}$, a única alternativa INCORRETA é:

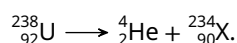
- A ()** Na emissão de uma partícula α , o ${}^{238}_{92}\text{U}$ decai para um elemento ${}^{234}_{90}\text{X}$.
- B ()** Por não ser físsil, o ${}^{238}_{92}\text{U}$ não é empregado isoladamente para a geração de energia em reatores nucleares.
- C ()** Uma partícula α é emitida espontaneamente por certos núcleos de elementos radioativos, com número atômico maior que 82, como urânio, tório, polônio e rádio.
- D ()** Na emissão de uma partícula α e de duas partículas β , o ${}^{238}_{92}\text{U}$ decai para o seu isótopo ${}^{234}_{92}\text{U}$.
- E ()** A distribuição eletrônica do ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^2$) garante sua estabilidade nuclear.

Gabarito: E

As emissões alfa e beta são verificadas pela conservação dos números de massa e atômico. A estabilidade nuclear depende do núcleo, não da configuração da eletrosfera.

Etapla 1. Alternativa A: Correta

A emissão alfa reduz o número de massa em 4 e o número atômico em 2:



Os números se conservam: $238 = 4 + 234$ e $92 = 2 + 90$.

Etapla 2. Alternativa B: Correta

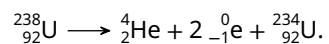
O ${}^{238}\text{U}$ não é físsil, isto é, não sustenta por si só a reação em cadeia por nêutrons térmicos. O ${}^{235}\text{U}$ é o isótopo físsil presente no urânio natural; o enriquecimento aumenta sua proporção.

Etapla 3. Alternativa C: Correta

Certos núcleos pesados dos elementos citados emitem partículas alfa espontaneamente. Esse processo altera a composição do núcleo e gera outro elemento.

Etapla 4. Alternativa D: Correta

Na série indicada, as emissões beta são β^- . Cada uma aumenta o número atômico em 1 e não altera o número de massa. O balanço das emissões é



Após uma emissão alfa e duas beta, o número atômico retorna a 92 e o número de massa passa a 234. O produto é outro isótopo do urânio.

Etapas 5. Alternativa E: Incorreta

A configuração eletrônica descreve a eletrosfera. Ela não garante a estabilidade nuclear, que depende da composição e da estrutura do núcleo, incluindo a relação entre prótons e nêutrons.

A alternativa incorreta pedida é **E**.