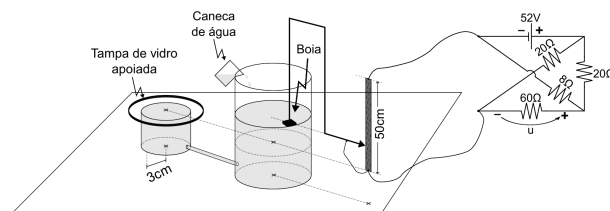


GABARITO FÍSICA

Questão 1



A figura ilustra dois recipientes cilíndricos comunicantes. O primeiro recipiente possui seção reta circular de 3 cm de raio e está inicialmente fechado por uma tampa de vidro plana perfeitamente apoiada em sua face superior. Um líquido incompressível de massa específica ρ é lentamente despejado no segundo recipiente, fazendo-se variar a posição vertical de uma boia de massa e volume desprezíveis que flutua sobre a superfície do líquido.

A boia está afixada a um cursor metálico de resistência nula que faz contato com uma barra resistiva homogênea, posicionada na vertical, cuja resistência total é de $10\ \Omega$ e cujo comprimento total é de 50 cm.

Dados:

- massa da tampa apoiada.: 1004,4 g;
- $\pi \approx 3,1$.

Observações:

- a tampa possui aproximadamente as dimensões da seção circular do primeiro recipiente;
- a boia nunca estará abaixo do plano da tampa apoiada do primeiro recipiente;
- a altura do ponto de contato do cursor metálico com a barra resistiva sempre coincide com a altura da boia;
- a barra resistiva faz parte de um circuito elétrico por meio de ligações com fios condutores ideais.

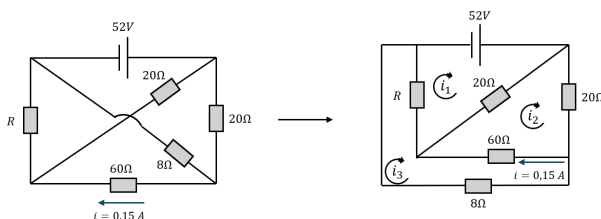
Sabendo que, no instante em que o líquido começa a vazar por baixo da tampa apoiada, a tensão u indicada na figura é +9 V, determine numericamente o valor de ρ .

Gabarito

O circuito fornece os dados elétricos para determinarmos a resistência elétrica até a altura da boia. Com isso, encontramos a altura do líquido no recipiente, que permite calcular a pressão hidrostática necessária para erguer a tampa. Igualando a força da pressão hidrostática ao peso da tampa, encontramos a massa específica do líquido.

Etapa 1. Aplique a Lei das Malhas de Kirchhoff.

Desenhando o circuito e reestruturando as malhas para melhor visualização:



Montando a lei de Kirchhoff para cada malha do circuito:



$$\begin{cases} i_1 : 52 \text{ V} - (20 \, \Omega)i_1 + (20 \, \Omega)i_2 - Ri_1 + Ri_3 = 0 \\ i_2 : -(20 \, \Omega)i_2 - (60 \, \Omega)i_2 + (60 \, \Omega)i_3 - (20 \, \Omega)i_2 + (20 \, \Omega)i_1 = 0 \\ i_3 : -Ri_3 + Ri_1 - (60 \, \Omega)i_3 + (60 \, \Omega)i_2 - (8 \, \Omega)i_3 = 0 \end{cases}$$

Pela figura, a corrente no resistor de $8 \, \Omega$ é a diferença entre as correntes de malha:

$$i = i_2 - i_3 = 0,15 \text{ A}$$

Simplificando o sistema omitindo as unidades:

$$\begin{cases} (20 + R)i_1 - 20i_2 - Ri_3 = 52 \\ -20i_1 + 100i_2 - 60i_3 = 0 \\ -Ri_1 - 60i_2 + (68 + R)i_3 = 0 \end{cases}$$

Somando as três equações:

$$\begin{aligned} 20i_2 + 8i_3 &= 52 \\ 5i_2 + 2i_3 &= 13 \end{aligned}$$

Montando o sistema com a relação das correntes:

$$\begin{cases} 5i_2 + 2i_3 = 13 \\ i_2 - i_3 = 0,15 \end{cases}$$

Resolvendo, chegamos a $i_2 = 1,9 \text{ A}$ e $i_3 = 1,75 \text{ A}$. Substituindo na segunda equação das malhas:

$$i_1 = 5i_2 - 3i_3 = 5(1,9) - 3(1,75) = 4,25 \text{ A}$$

Etapla 2. Calcule a resistência R e o deslocamento da boia.

Substituindo as correntes na terceira equação do sistema das malhas:

$$\begin{aligned} R(i_1 - i_3) &= 68i_3 - 60i_2 \\ R(4,25 - 1,75) &= 68(1,75) - 60(1,9) \\ 2,5R &= 119 - 114 \\ R &= 2 \, \Omega \end{aligned}$$

Como a barra é homogênea, a resistência é proporcional ao comprimento. Se a resistência total da barra de 50 cm é de $10 \, \Omega$, a altura do contato é:

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_{\text{total}}} &= \frac{R}{R_{\text{total}}} \\ L &= 50 \text{ cm} \cdot \frac{2 \, \Omega}{10 \, \Omega} \\ L &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Como a boia estava no fundo (com a tampa apoiada) e subiu junto com o nível da água até a barra estar a 10 cm do contato superior, o deslocamento vertical da boia e o desnível do líquido é $h = 50 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$.

Etapla 3. Calcule a massa específica do líquido.

O líquido vaza quando a força resultante da pressão hidrostática exercida no recipiente se iguala ao peso da tampa.

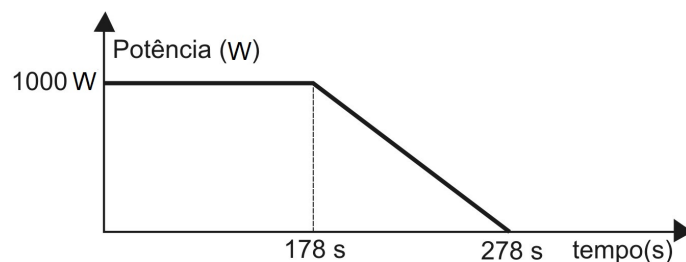
$$\begin{aligned} P_{\text{tampa}} &= F_{\text{hidrostática}} \\ mg &= p \cdot A \\ mg &= (\rho gh) \cdot (\pi r^2) \\ \rho &= \frac{m}{h\pi r^2} \end{aligned}$$

Substituindo os valores em unidades do CGS:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1004,4 \text{ g}}{(40 \text{ cm})(3,1)(3 \text{ cm})^2} \\ \rho &= \frac{1004,4 \text{ g}}{1116 \text{ cm}^3} \\ \rho &= \boxed{0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \end{aligned}$$



Questão 2



Vapor d'água pode ser utilizado para movimentar uma turbina, a qual aciona um gerador que produz energia elétrica. Para tal objetivo, pretende-se aquecer e ferver uma amostra de água pura, fazendo-se uso de um aquecedor elétrico acondicionado em um recipiente isolado do ambiente. Sua potência gerada está descrita na figura acima.

Dados:

- volume da amostra de água: $1/2$ L;
- temperatura inicial da água e do recipiente.: 20°C ;
- capacidade térmica do recipiente isolado: $360 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}$;
- calor de vaporização da água: $6400/3 \frac{\text{J}}{\text{g}}$;
- calor específico da água: $4180 \frac{\text{J}}{(\text{kg}^\circ\text{C})}$;
- massa específica da água: $1,0 \frac{\text{kg}}{\text{L}}$.

Observações:

- toda a potência do aquecedor elétrico é transferida para o conjunto água + recipiente;
- todo o conjunto está instantaneamente à mesma temperatura.

Em função dos dados acima, determine:

- a energia necessária para que a amostra de água comece a ferver;
- o tempo necessário para que a amostra de água comece a ferver;
- a massa de água que poderá ser fervida no processo.

Gabarito

O sistema absorve energia térmica tanto na água quanto no recipiente. Calculamos primeiro a energia necessária para atingir a ebulição. Depois, usamos a área sob a curva de potência para determinar o tempo e a energia total disponível, o que nos permite encontrar a massa de água vaporizada.

Etapa 1. (a) Calcule a energia necessária para o início da fervura.

A energia total absorvida até o ponto de ebulição (100°C) é a soma do calor sensível da água e do calor sensível do recipiente.

$$E = Q_{\text{água}} + Q_{\text{recipiente}}$$

$$E = (\rho V)c\Delta T + C\Delta T$$

$$E = (1,0 \frac{\text{kg}}{\text{L}})(0,5 \text{ L})(4180 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}})(80^\circ\text{C}) + (360 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}})(80^\circ\text{C})$$

$$E = 167\,200 \text{ J} + 28\,800 \text{ J}$$

$$E = \boxed{196 \text{ kJ}}$$

Etapa 2. (b) Determine o tempo necessário para o início da fervura.

A energia fornecida pelo aquecedor é numericamente igual à área sob a curva de potência pelo tempo no gráfico. Sabemos que a energia necessária é de 196 kJ. No trecho de potência constante (até 178 s), a energia fornecida é:

$$E_1 = (1000 \text{ W})(178 \text{ s}) = 178 \text{ kJ}$$

Como a energia total para ferver é 196 kJ, faltam 18 kJ, o que indica que a água começa a ferver no trecho de potência variável. A equação da reta para $t \geq 178$ é:

$$P(t) = 1000 - \frac{1000}{100}(t - 178) = 1000 - 10(t - 178)$$

A área do trapézio entre $t = 178$ e t deve ser igual aos 18 000 J restantes:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1000 + P(t)}{2} \cdot (t - 178) \\ 18000 &= \frac{1000 + 1000 - 10(t - 178)}{2} \cdot (t - 178) \\ 3600 &= (200 - (t - 178)) \cdot (t - 178) \end{aligned}$$

Seja $x = t - 178$. Então:

$$\begin{aligned} x(200 - x) &= 3600 \\ x^2 - 200x + 3600 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$x = \frac{200 \pm \sqrt{40000 - 14400}}{2} = \frac{200 \pm 160}{2}$$

Como x deve ser menor que 100 s (o tempo total de descida da rampa), temos $x = 20$ s. Portanto, o tempo decorrido é:

$$\begin{aligned} t &= 178 + 20 \\ t &= \boxed{198 \text{ s}} \end{aligned}$$

Etapa 3. (c) Calcule a massa de água que poderá ser fervida no processo.

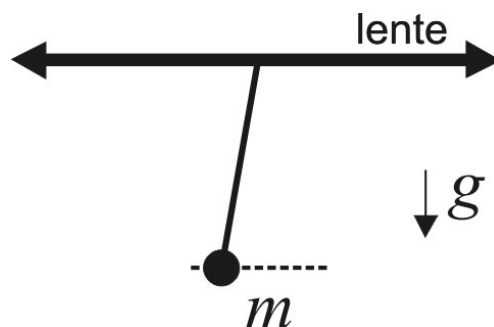
A energia total fornecida pelo aquecedor em todo o processo é a área total do gráfico:

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= (1000 \text{ W})(178 \text{ s}) + \frac{(1000 \text{ W})(100 \text{ s})}{2} \\ E_{\text{total}} &= 178\,000 \text{ J} + 50\,000 \text{ J} = 228 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Essa energia aquece o sistema até a fervura e vaporiza uma massa m de água:

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E + mL \\ 228\,000 \text{ J} &= 196\,000 \text{ J} + m \left(\frac{6400}{3} \frac{\text{J}}{\text{g}} \right) \\ 32000 &= m \cdot \frac{6400}{3} \\ m &= \frac{32000 \cdot 3}{6400} \\ m &= \boxed{15 \text{ g}} \end{aligned}$$

Questão 3



Uma lente convergente está posicionada num plano horizontal e possui, presa a seu centro, um pêndulo composto por um fio ideal e uma partícula de massa m . O movimento da partícula provoca uma oscilação na posição de sua imagem gerada pela lente.

Dados:

- distância focal da lente: 30 cm;
- amplitude horizontal do movimento pendular da partícula.: 4 cm;
- amplitude do movimento da imagem da partícula: 12 cm;
- massa da partícula: 1 kg;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;
- $\pi \approx 3$.

Observação:

- a amplitude do movimento pendular da partícula é pequena a ponto de podermos aproximar sua trajetória a um segmento de reta.

A partir dos dados acima, determine os valores aproximados para:

- o comprimento do fio;
- o período de oscilação do pêndulo;
- a máxima energia cinética atingida pela partícula.

Gabarito

O aumento linear transversal relaciona as amplitudes do objeto e da imagem. Como o enunciado fornece apenas o módulo desse aumento, devemos analisar as duas possibilidades: imagem invertida (real) e imagem direita (virtual). Para cada caso, calculamos o comprimento do fio pela equação de Gauss, o período com a fórmula do pêndulo simples e a energia a partir do modelo do MHS.

Etapa 1. Determine a relação entre as posições para os dois casos possíveis.

Escrevendo o aumento linear como razão entre as amplitudes da imagem e do objeto, temos:

$$|A| = \frac{i}{o} = \frac{12 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 3$$

O aumento pode ser positivo (imagem direita e virtual) ou negativo (imagem invertida e real).

Para o primeiro caso (imagem invertida, real):

$$A_1 = -\frac{p'}{p} = -3 \Rightarrow p' = 3p$$

Para o segundo caso (imagem direita, virtual):

$$A_2 = -\frac{p'}{p} = 3 \Rightarrow p' = -3p$$

**Etapa 2. (a) Calcule o comprimento do fio para cada caso.**

A distância do objeto (o pêndulo) até a lente (p) corresponde ao comprimento L do fio. Aplicamos a equação de Gauss. Para o primeiro caso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ \frac{1}{30 \text{ cm}} &= \frac{1}{L_1} + \frac{1}{3L_1} \\ \frac{1}{30} &= \frac{4}{3L_1} \\ L_1 &= \boxed{40 \text{ cm}}\end{aligned}$$

Para o segundo caso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ \frac{1}{30 \text{ cm}} &= \frac{1}{L_2} - \frac{1}{3L_2} \\ \frac{1}{30} &= \frac{2}{3L_2} \\ L_2 &= \boxed{20 \text{ cm}}\end{aligned}$$

Etapa 3. (b) Calcule o período de oscilação do pêndulo para cada caso.

Para pequenas amplitudes, utilizamos a fórmula do período do pêndulo simples:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Para o primeiro caso ($L_1 = 0,4 \text{ m}$):

$$\begin{aligned}T_1 &= 2(3)\sqrt{\frac{0,4 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \\ T_1 &= 6\sqrt{0,04} \\ T_1 &= 6(0,2) \\ T_1 &= \boxed{1,2 \text{ s}}\end{aligned}$$

Para o segundo caso ($L_2 = 0,2 \text{ m}$):

$$\begin{aligned}T_2 &= 2(3)\sqrt{\frac{0,2 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \\ T_2 &= 6\sqrt{\frac{2}{100}} \\ T_2 &= 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \\ T_2 &= \boxed{0,6\sqrt{2} \text{ s}}\end{aligned}$$

Etapa 4. (c) Calcule a máxima energia cinética para cada caso.

A energia cinética máxima em um Movimento Harmônico Simples é igual à sua energia mecânica total:

$$E_{\text{cin,máx}} = E_m = \frac{kA_{\text{obj}}^2}{2}$$

No pêndulo simples para pequenas oscilações, a constante elástica equivalente é $k = \frac{mg}{L}$. Assim:

$$E_{\text{cin,máx}} = \frac{mgA_{\text{obj}}^2}{2L}$$

Para o primeiro caso:

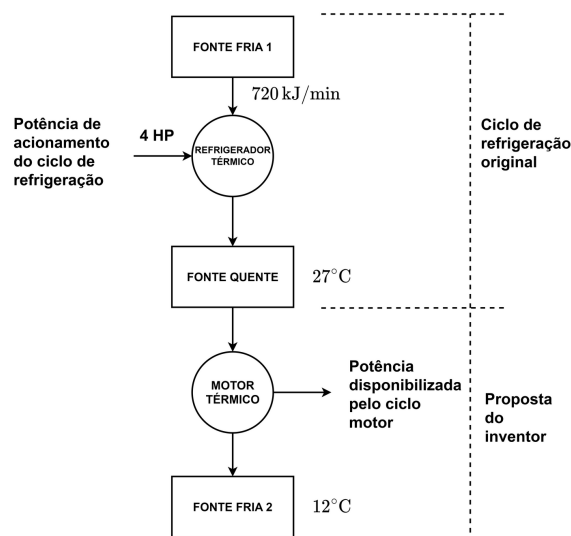


$$E_1 = \frac{(1 \text{ kg})(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0,04 \text{ m})^2}{2(0,4 \text{ m})}$$
$$E_1 = \frac{10 \cdot 0,0016}{0,8}$$
$$E_1 = \frac{0,016}{0,8}$$
$$E_1 = \boxed{0,02\text{J}}$$

Para o segundo caso:

$$E_2 = \frac{(1 \text{ kg})(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0,04 \text{ m})^2}{2(0,2 \text{ m})}$$
$$E_2 = \frac{10 \cdot 0,0016}{0,4}$$
$$E_2 = \frac{0,016}{0,4}$$
$$E_2 = \boxed{0,04\text{J}}$$

Questão 4



Ao analisar um ciclo de refrigeração em funcionamento, um inventor propõe o aproveitamento do calor rejeitado para a fonte quente através do seguinte esquema: um motor térmico operando em ciclo termodinâmico é acoplado em série ao ciclo original, conforme esboço da figura, produzindo trabalho e rejeitando calor para um reservatório térmico adicional.

O inventor argumenta que, sob condições de máximo desempenho do ciclo motor: (1) a potência gerada é de 2 HP; (2) a taxa de transferência de calor para o reservatório térmico adicional é capaz de prover energia equivalente para acender 200 lâmpadas de 50 W de potência cada.

Dados:

- taxa de transferência de calor da fonte fria para o ciclo de refrigeração: $720 \frac{\text{kJ}}{\text{min}}$;
- temperatura da fonte quente comum ao ciclo de refrigeração e ao ciclo motor: 27°C ;
- potência de acionamento do ciclo de refrigeração: 4 HP;
- temperatura da fonte fria do ciclo motor: 12°C ;
- coeficiente de desempenho (COP) do ciclo de refrigeração: 12/22 do equivalente ao ciclo de Carnot;
- razão de aproveitamento da taxa de transferência de calor oriunda do ciclo de refrigeração para o ciclo motor: 2/3;
- $1 \text{ HP} \approx 3/4 \text{ kW}$.

Baseado em uma análise termodinâmica e nos dados listados:

- argumente, justificando, sobre a acurácia das duas proposições do inventor;
- avalie a temperatura da fonte fria do ciclo de refrigeração, em $^\circ\text{C}$.

Gabarito

Calculamos a taxa de calor rejeitada pelo refrigerador e a fração que entra no motor. Com a máxima eficiência de Carnot para o motor, determinamos a potência útil e o calor rejeitado para avaliar as alegações do inventor. Por fim, usamos o COP real do refrigerador para achar a temperatura da sua fonte fria.

Etapa 1. (a) Avalie as proposições do inventor.

A taxa de transferência de calor da fonte fria para o ciclo de refrigeração é $\Phi_{F1} = 720 \frac{\text{kJ}}{\text{min}}$. Convertendo para kW:

$$\Phi_{F1} = \frac{720 \text{ kJ}}{60 \text{ s}} = 12 \text{ kW}$$

A potência de acionamento do refrigerador é $P_R = 4 \text{ HP}$. Como $1 \text{ HP} \approx 0,75 \text{ kW}$:



$$P_R = 4 \cdot 0,75 \text{ kW} = 3 \text{ kW}$$

Pela Primeira Lei da Termodinâmica, a taxa total de calor rejeitado para a fonte quente comum é:

$$\Phi_{Q1} = \Phi_{F1} + P_R$$

$$\Phi_{Q1} = 12 \text{ kW} + 3 \text{ kW} = 15 \text{ kW}$$

Segundo o enunciado, a razão de aproveitamento para o ciclo motor é $2/3$, logo a taxa de calor que entra no motor é:

$$\Phi_Q = \frac{2}{3} \Phi_{Q1}$$

$$\Phi_Q = \frac{2}{3} (15 \text{ kW}) = 10 \text{ kW}$$

A condição de “máximo desempenho” implica que o motor opera no ciclo de Carnot. Suas temperaturas são $T_Q = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$ e $T_F = 12^\circ\text{C} = 285 \text{ K}$. O rendimento máximo é:

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_Q}$$

$$\eta = 1 - \frac{285}{300} = \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = 0,05$$

A potência máxima útil (trabalho por unidade de tempo) produzida pelo motor é:

$$P_{\text{útil}} = \eta \Phi_Q$$

$$P_{\text{útil}} = 0,05 \cdot 10 \text{ kW} = 0,5 \text{ kW}$$

Convertendo para HP:

$$P_{\text{útil}} = \frac{0,5 \text{ kW}}{0,75 \frac{\text{kW}}{\text{HP}}} = \frac{2}{3} \text{ HP}$$

Como $2/3 \text{ HP} < 2 \text{ HP}$, a **primeira proposição é falsa**.

A taxa de transferência de calor rejeitada para o reservatório adicional é:

$$\Phi_{F2} = \Phi_Q - P_{\text{útil}}$$

$$\Phi_{F2} = 10 \text{ kW} - 0,5 \text{ kW} = 9,5 \text{ kW}$$

A potência necessária para acender 200 lâmpadas de 50 W é:

$$P_{\text{lâmpadas}} = 200 \cdot 50 \text{ W} = 10\,000 \text{ W} = 10 \text{ kW}$$

Como $9,5 \text{ kW} < 10 \text{ kW}$, a **segunda proposição também é falsa**.

As duas proposições são falsas.

Etapla 2. (b) Avalie a temperatura da fonte fria do refrigerador.

O coeficiente de desempenho real (e) do refrigerador é a razão entre o calor extraído da fonte fria e o trabalho de acionamento:

$$e = \frac{\Phi_{F1}}{P_R} = \frac{12 \text{ kW}}{3 \text{ kW}} = 4$$

O COP do refrigerador de Carnot operando entre as mesmas temperaturas é:

$$COP_{\text{Carnot}} = \frac{T_{F1}}{T_{Q1} - T_{F1}} = \frac{T_{F1}}{300 - T_{F1}}$$

O enunciado afirma que o COP real é $12/22$ do equivalente de Carnot. Assim:

$$e = \frac{12}{22} \cdot COP_{\text{Carnot}}$$

$$4 = \frac{12}{22} \cdot \frac{T_{F1}}{300 - T_{F1}}$$

$$1 = \frac{3}{22} \cdot \frac{T_{F1}}{300 - T_{F1}}$$

$$22(300 - T_{F1}) = 3T_{F1}$$

$$6600 - 22T_{F1} = 3T_{F1}$$

$$25T_{F1} = 6600$$

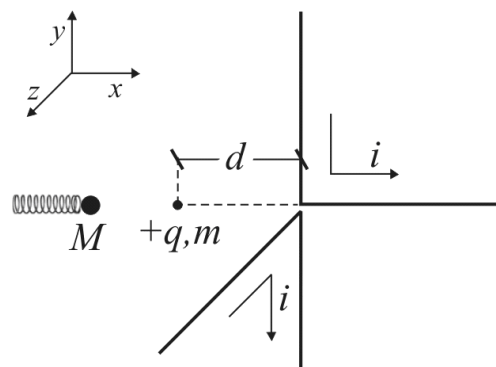
$$T_{F1} = 264 \text{ K}$$

Convertendo para Celsius:

$$\theta_{F1} = 264 - 273$$

$$\theta_{F1} = \boxed{-9^{\circ}\text{C}}$$

Questão 5



A figura mostra um esquema contendo um par de fios infinitos dobrados com ângulos retos e duas partículas. Uma mola comprimida impulsiona a partícula maior até que se choque de forma perfeitamente inelástica com a outra partícula menor, carregada eletricamente e inicialmente em repouso.

Dados:

- massa da partícula maior: M ;
- massa da partícula menor: m ;
- carga da partícula menor: $+q$;
- posição inicial da partícula menor: $(-d, 0, 0)$;
- corrente elétrica em cada fio: i ;
- energia potencial da mola transferida para a partícula maior: E_p ;
- permeabilidade magnética do meio: μ_0 .

Observações:

- a mola e todos os segmentos dos fios são paralelos aos eixos indicados;
- após o choque, as partículas permanecem unidas;
- os dois fios estão muito próximos, mas não se encostam;
- a partícula maior desprende-se da mola ao atingir a maior energia cinética;
- para efeito de cálculo de campo magnético, considere que um fio semi-infinito contribua com a metade do valor do campo produzido por um fio infinito na posição $(-d, 0, 0)$, exceto quando o prolongamento do fio semi-infinito passa pela posição em questão (contribuição nula).

A partir dos dados acima, no instante imediatamente após o choque, determine:

- o vetor velocidade das partículas;
- o vetor campo magnético produzido pelo conjunto dos dois fios na posição do choque;
- o vetor força magnética que age sobre as partículas unidas;
- o raio de giração do movimento das partículas unidas.

Gabarito

O sistema envolve conservação da energia e da quantidade de movimento para o choque inelástico, seguida pelo cálculo do campo magnético resultante gerado pelos fios na origem. Com a velocidade e o campo, calculamos a força magnética pela Lei de Lorentz, e com a força centrípeta deduzimos o raio de giração do movimento subsequente.

Etapa 1. (a) Determine o vetor velocidade das partículas.

Como a partícula maior (M) não possui carga elétrica, a única força que realiza trabalho sobre ela antes do choque é a força elástica da mola. Pela conservação da energia mecânica:

$$\begin{aligned} E_p &= E_{\text{cin}} \\ E_p &= \frac{Mv_0^2}{2} \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2E_p}{M}} \end{aligned}$$

O choque é perfeitamente inelástico. Pela conservação da quantidade de movimento do sistema na direção x :

$$\begin{aligned} Q_{\text{final}} &= Q_{\text{inicial}} \\ (M+m)v &= Mv_0 \\ v &= \frac{M}{M+m} \sqrt{\frac{2E_p}{M}} \end{aligned}$$

Como a partícula avança no sentido positivo do eixo x , o vetor velocidade é:

$$\vec{v} = \frac{M}{M+m} \sqrt{\frac{2E_p}{M}} \hat{i}$$

Etapa 2. (b) Determine o vetor campo magnético resultante na posição do choque.

O campo magnético gerado por um fio semi-infinito à distância d tem módulo:

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi d}$$

Os fios que passam pela posição da colisão (eixo x) não geram campo magnético naquele ponto. Restam três trechos de fios semi-infinitos. Pela regra da mão direita, esses três fios geram os seguintes campos na posição do choque:

$$\begin{aligned} \vec{B}_R &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \\ \vec{B}_R &= \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (0, 1, 0) + \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (0, 0, -1) + \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (0, 0, -1) \\ \vec{B}_R &= \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (0, 1, -2) \end{aligned}$$

O módulo desse campo magnético resultante é:

$$\begin{aligned} B_R &= \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ B_R &= \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \sqrt{5} \end{aligned}$$

Etapa 3. (c) Calcule a força magnética sobre as partículas unidas.

A força magnética é dada por $\vec{F}_{\text{mag}} = q(\vec{v} \times \vec{B}_R)$. Calculando o produto vetorial com o campo e a velocidade $(v, 0, 0)$:

$$\vec{v} \times \vec{B}_R = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = (0, -vB_z, vB_y)$$

Substituindo os valores encontrados:

$$\begin{aligned} -vB_z &= -v \left(-2 \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \right) = 2v \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \\ vB_y &= v \left(1 \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \right) = v \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \end{aligned}$$

Portanto, o vetor força magnética é:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \left(\frac{M}{M+m} \right) \sqrt{\frac{2E_p}{M}} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi d} \right) (0, 2, 1)$$

O módulo dessa força magnética é:

$$F_{\text{mag}} = qv \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi d} \right) \sqrt{2^2 + 1^2} = qv \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi d} \right) \sqrt{5} = qvB_R$$

Isso confirma que a velocidade ($\vec{v}$) e o campo (plano y - z) são perpendiculares ($\theta = 90^\circ$).

Etapa 4. (d) Determine o raio de giração.

Sendo o movimento subsequente um movimento circular uniforme, a força magnética atua como a resultante centrípeta.

$$\begin{aligned} F_{\text{ctp}} &= F_{\text{mag}} \\ \frac{(M+m)v^2}{R} &= qvB_R \\ R &= \frac{(M+m)v}{qB_R} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de v e B_R :

$$\begin{aligned} R &= \frac{(M+m)}{q \left(\frac{\mu_0 i \sqrt{5}}{4\pi d} \right)} \left[\frac{M}{M+m} \sqrt{\frac{2E_p}{M}} \right] \\ R &= \frac{4\pi d}{q\mu_0 i \sqrt{5}} \cdot M \sqrt{\frac{2E_p}{M}} \\ R &= \left[\frac{M}{q} \sqrt{\frac{2E_p}{5M}} \left(\frac{4\pi d}{\mu_0 i} \right) \right] \end{aligned}$$

Questão 6

Considere um corpo descrevendo uma órbita circular de raio r e velocidade v , resultando num período T , em torno da Terra.

Dados:

- constante universal da gravitação: G ;
- massa do corpo: m ;
- massa da Terra.: M .

Observação:

- $(1+x)^n \approx 1+nx$, para $|x| \ll 1$.

Quando o corpo se move para uma órbita circular de raio $r + \Delta r$, sendo $\Delta r \ll r$, seu novo período de órbita passa a ser $T + \Delta T$ e sua nova velocidade orbital se torna $v + \Delta v$.

Determine o valor aproximado:

- de ΔT em função de Δr e v ;
- de Δv em função de Δr e T ;
- da energia potencial gravitacional em função de Δr , r , G , m e M .

Gabarito

A partir da Terceira Lei de Kepler e da relação entre velocidade, raio e período, aplicamos a aproximação binomial dada no enunciado para relacionar pequenas variações de raio com variações de período e velocidade. Em seguida, aplicamos a mesma aproximação à expressão da energia potencial gravitacional para encontrar sua forma aproximada.

Etapla 1. (a) Determine ΔT em função de Δr e v .

Pela Terceira Lei de Kepler, a razão entre o quadrado do período e o cubo do raio é constante para uma órbita:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(T + \Delta T)^2}{(r + \Delta r)^3}$$

Reescrevendo as frações isolando o fator comum:

$$\begin{aligned}\frac{T^2}{r^3} &= \frac{T^2 \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2}{r^3 \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3} \\ 1 &= \frac{\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2}{\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3} \\ \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2 &= \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3\end{aligned}$$

Aplicando a aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$:

$$\begin{aligned}1 + 2\frac{\Delta T}{T} &= 1 + 3\frac{\Delta r}{r} \\ 2\frac{\Delta T}{T} &= 3\frac{\Delta r}{r} \\ \Delta T &= \frac{3T\Delta r}{2r}\end{aligned}$$

Sabemos que a velocidade orbital é $v = \frac{2\pi r}{T}$, ou seja, $\frac{T}{r} = \frac{2\pi}{v}$. Substituindo:

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{v}\right) \Delta r \\ \Delta T &= \boxed{\frac{3\pi\Delta r}{v}}\end{aligned}$$

Etapla 2. (b) Determine Δv em função de Δr e T .

A velocidade orbital inicial é $v = \frac{2\pi r}{T}$. A nova velocidade é:

$$\begin{aligned}v + \Delta v &= \frac{2\pi(r + \Delta r)}{T + \Delta T} \\ v + \Delta v &= \frac{2\pi r \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)}{T \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)} \\ v + \Delta v &= v \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Aplicando a aproximação para o expoente -1 :

$$\begin{aligned}v + \Delta v &= v \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right) \\ v + \Delta v &= v \left(1 - \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta r \Delta T}{rT}\right)\end{aligned}$$

Desprezando o termo de segunda ordem (produto das variações), ficamos com:

$$\begin{aligned}v + \Delta v &= v + v\frac{\Delta r}{r} - v\frac{\Delta T}{T} \\ \Delta v &= v\frac{\Delta r}{r} - v\frac{\Delta T}{T}\end{aligned}$$

Substituindo ΔT em função de Δr que encontramos no item (a) (a forma $\Delta T = \frac{3T\Delta r}{2r}$):



$$\Delta v = v \frac{\Delta r}{r} - \frac{v}{T} \left(\frac{3T\Delta r}{2r} \right)$$

$$\Delta v = v \frac{\Delta r}{r} - \frac{3v\Delta r}{2r}$$

$$\Delta v = -\frac{v\Delta r}{2r}$$

Como $v = \frac{2\pi r}{T}$, temos $\frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$. Substituindo:

$$\Delta v = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right) \Delta r$$

$$\Delta v = \boxed{-\frac{\pi \Delta r}{T}}$$

Etapas 3. (c) Determine a energia potencial gravitacional.

A energia potencial gravitacional da nova órbita é dada por:

$$E_p = -\frac{GMm}{r + \Delta r}$$

Fatorando o raio inicial no denominador:

$$E_p = -\frac{GMm}{r \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right)}$$

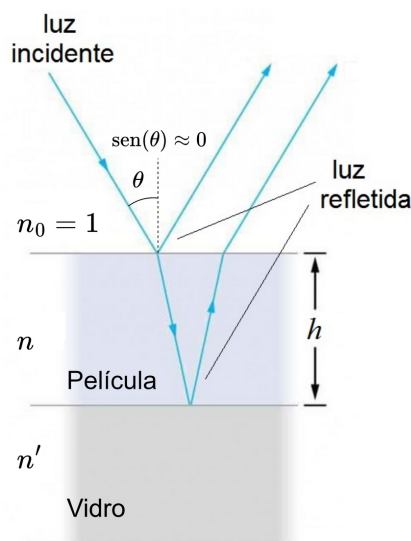
$$E_p = -\frac{GMm}{r} \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right)^{-1}$$

Aplicando a aproximação para o expoente -1 :

$$E_p \approx -\frac{GMm}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r} \right)$$

$$E_p \approx \boxed{-\frac{GMm}{r} + \frac{GMm\Delta r}{r^2}}$$

Questão 7



Uma onda de luz plana e monocromática propaga-se no vácuo e incide quase perpendicularmente sobre uma película depositada sobre uma placa de vidro. As ondas refletidas pela película e pelo vidro sofrem interferência completamente destrutiva ao retornarem ao vácuo para três valores de comprimento de onda da luz incidente, sendo dois deles conhecidos.

Dados:

- 1º comprimento de onda no vácuo conhecido para a ocorrência de interferência destrutiva: λ_1 ;
- 2º comprimento de onda no vácuo conhecido para a ocorrência de interferência destrutiva: λ_2 ;
- $\lambda_1 > \lambda_2$;
- índice de refração da película.: n ;
- índice de refração do vidro: n' ;
- $n' > n$.

Observações:

- o ângulo de incidência pode não corresponder ao da figura, meramente ilustrativa;
- o valor do 3º comprimento de onda no vácuo para a ocorrência de interferência destrutiva está entre λ_1 e λ_2 .

Determine:

- a espessura h da película, indicada na figura, em função dos dados acima listados;
- o valor do terceiro comprimento de onda para interferência destrutiva;
- os valores de comprimento de onda no vácuo para o caso de haver interferência construtiva.

Gabarito

A luz reflete na interface vácuo-película (meio menos para mais refringente, invertendo fase) e na interface película-vidro (também menos para mais refringente, invertendo fase novamente). Como ocorrem duas inversões de fase, a interferência será destrutiva quando a diferença de caminho óptico for igual a um múltiplo ímpar de meio comprimento de onda na película.

Etapa 1. (a) Determine a espessura da película.

Para incidência quase perpendicular ($\theta \approx 0$), a diferença de caminho óptico entre o raio refletido na primeira superfície e o refletido na segunda é $\Delta S = 2h$. O comprimento de onda na película é $\lambda_p = \lambda/n$. A condição para interferência destrutiva, considerando duas inversões de fase, é:

$$\Delta S = 2h = k \frac{\lambda_p}{2} = k \frac{\lambda}{2n}, \quad \text{com } k \text{ ímpar}$$

Como $\lambda_1 > \lambda_3 > \lambda_2$, os comprimentos de onda decrescem à medida que o número ímpar k aumenta. O enunciado diz que ocorrem interferências destrutivas para três comprimentos de onda, sendo λ_3 o intermediário. Podemos associar a λ_1 um inteiro ímpar k , a λ_3 o próximo ímpar $k + 2$, e a λ_2 o seguinte $k + 4$.

Para λ_1 :

$$2h = k \frac{\lambda_1}{2n} \implies k = \frac{4nh}{\lambda_1}$$

Para λ_2 :

$$2h = (k + 4) \frac{\lambda_2}{2n} \implies k = \frac{4nh}{\lambda_2} - 4$$

Igualando as duas expressões para k :

$$\begin{aligned} \frac{4nh}{\lambda_1} &= \frac{4nh}{\lambda_2} - 4 \\ 4nh \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) &= 4 \\ nh \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) &= 1 \\ h &= \boxed{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}} \end{aligned}$$

Etapa 2. (b) Determine o terceiro comprimento de onda para interferência destrutiva.

O terceiro comprimento de onda, λ_3 , corresponde ao múltiplo ímpar $k + 2$:

$$\begin{aligned} 2h &= (k + 2) \frac{\lambda_3}{2n} \\ 4nh &= (k + 2) \lambda_3 \\ \lambda_3 &= \frac{4nh}{k + 2} \end{aligned}$$

Substituindo $k = \frac{4nh}{\lambda_1}$ na expressão acima:

$$4nh = \left(\frac{4nh}{\lambda_1} + 2 \right) \lambda_3$$

Substituindo $h = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{n(\lambda_1 - \lambda_2)}$, o termo $4nh$ torna-se $\frac{4\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$:

$$\begin{aligned} \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + 2 \right) \lambda_3 \\ \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \left(\frac{4\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + 2 \right) \lambda_3 \\ \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \left(\frac{4\lambda_2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_3 \\ 4\lambda_1 \lambda_2 &= (2\lambda_1 + 2\lambda_2) \lambda_3 \\ 4\lambda_1 \lambda_2 &= 2(\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 \\ \lambda_3 &= \boxed{\frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} \end{aligned}$$

Etapa 3. (c) Determine os comprimentos de onda para interferência construtiva.

A interferência construtiva ocorre quando a diferença de caminho óptico é um múltiplo par de meio comprimento de onda (ou múltiplo inteiro de λ_p):

$$2h = m \frac{\lambda_c}{n}, \quad \text{com } m \text{ inteiro positivo}$$

Isolando λ_c :

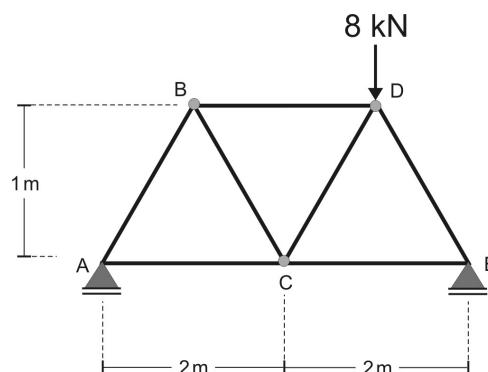
$$\lambda_c = \frac{2nh}{m}$$



Substituindo o valor de h :

$$\lambda_c = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{m(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \text{com } m \in \mathbb{N}^*$$

Questão 8



A treliça estável da figura, composta por barras metálicas formando 3 triângulos isósceles, é apoiada nos pontos A e E. No ponto D é aplicada uma força vertical, de cima para baixo, de 8 kN.

Diante do exposto, determine.:

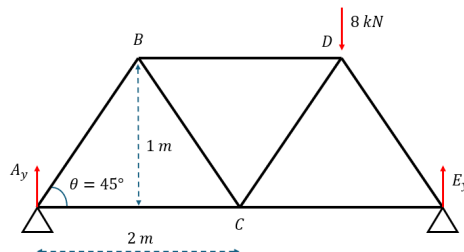
- as reações de apoio nos pontos A e E;
- as cargas a que são submetidas as barras AB, AC, CE e DE, além da natureza de cada uma delas (tração ou compressão);
- as cargas a que são submetidas as barras BC e CD, além da natureza de cada uma delas (tração ou compressão).

Gabarito

Calculamos as reações de apoio através do equilíbrio estático do corpo extenso (soma de forças e momentos nulos). Em seguida, usamos o método dos nós para isolar os pontos da treliça e, por equilíbrio do ponto material, determinar a tração ou compressão em cada barra.

Etapa 1. (a) Determine as reações de apoio nos pontos A e E.

Vamos considerar que os apoios da figura não realizam reações na horizontal (o pino está roletado ou não há cargas horizontais atuantes), apenas reações verticais A_y e E_y orientadas para cima.



Pelo equilíbrio de momentos em relação ao polo A:

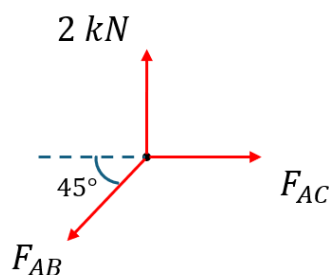
$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \\ E_y \cdot 4 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m} + 1 \text{ m}) &= 0 \\ 4E_y &= 8 \cdot 3 \\ E_y &= \boxed{6 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Pelo equilíbrio de forças na direção vertical:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ A_y + E_y - 8 &= 0 \\ A_y + 6 &= 8 \\ A_y &= \boxed{2 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Etapa 2. (b) Determine as cargas nas barras AB, AC, CE e DE.

Analisando as forças no nó A, sabemos que a reação $A_y = 2 \text{ kN}$ aponta para cima. Para o nó estar em equilíbrio, a barra AB deve estar comprimida (empurrando o nó para baixo e para a esquerda) e a barra AC deve estar tracionada (puxando o nó para a direita). Como os triângulos isósceles têm base 2 m e altura 1 m, o meio da base é 1 m, logo os catetos são iguais (1 m) e o ângulo é 45° .



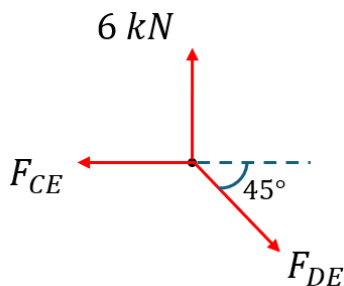
No eixo y do nó A:

$$\begin{aligned}F_{AB} \sin(45^\circ) &= A_y \\ F_{AB} \frac{\sqrt{2}}{2} &= 2 \\ F_{AB} &= \boxed{2\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}}\end{aligned}$$

No eixo x do nó A:

$$\begin{aligned}F_{AC} &= F_{AB} \cos(45^\circ) \\ F_{AC} &= 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ F_{AC} &= \boxed{2 \text{ kN (tração)}}\end{aligned}$$

Analisando as forças no nó E, a reação $E_y = 6 \text{ kN}$ aponta para cima. Por simetria, a barra DE está comprimida e a barra CE está tracionada.



No eixo y do nó E:

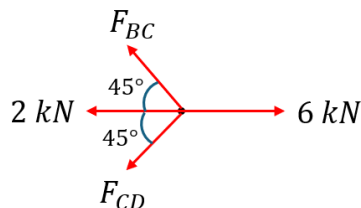
$$\begin{aligned}F_{DE} \sin(45^\circ) &= E_y \\ F_{DE} \frac{\sqrt{2}}{2} &= 6 \\ F_{DE} &= \boxed{6\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}}\end{aligned}$$

No eixo x do nó E:

$$\begin{aligned}F_{CE} &= F_{DE} \cos(45^\circ) \\ F_{CE} &= 6\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ F_{CE} &= \boxed{6 \text{ kN (tração)}}\end{aligned}$$

Etapas 3. (c) Determine as cargas nas barras BC e CD.

Analizando as forças no nó C, já sabemos que a barra AC puxa-o para a esquerda com 2 kN e a barra CE puxa-o para a direita com 6 kN. Para haver equilíbrio horizontal, deve haver uma força resultante das barras BC e CD apontando para a esquerda. Avaliando os eixos, supomos a barra BC tracionada e a barra CD comprimida.



No eixo y do nó C, a barra BC puxa para cima e a CD empurra para baixo:

$$F_{BC} \sin(45^\circ) = F_{CD} \sin(45^\circ)$$

$$F_{BC} = F_{CD}$$

No eixo x do nó C, F_{CE} está para a direita, enquanto F_{AC} , $F_{BC,x}$ e $F_{CD,x}$ estão para a esquerda:

$$F_{AC} + F_{BC} \cos(45^\circ) + F_{CD} \cos(45^\circ) = F_{CE}$$

$$2 + 2F_{BC} \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$F_{BC} \sqrt{2} = 4$$

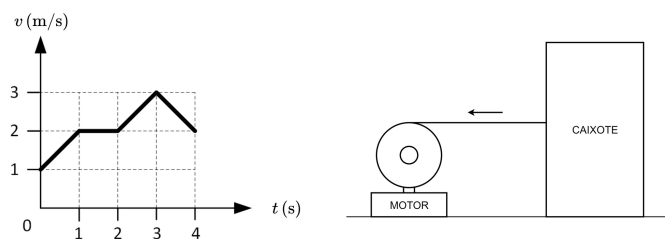
$$F_{BC} = \boxed{2\sqrt{2} \text{ kN (tração)}}$$

Como $F_{BC} = F_{CD}$:

$$F_{CD} = \boxed{2\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}}$$



Questão 9



Considere um caixote que é puxado por um motor com bateria e que, em $t = 0$, move-se em linha reta e no mesmo sentido ao longo de uma superfície horizontal com atrito. Durante a trajetória ao longo da superfície, a velocidade do caixote varia conforme o gráfico ilustrado na figura acima.

Dados:

- massa do caixote: 2 kg;
- diferença de potencial da bateria.: 10 V;
- coeficiente de atrito cinético: 0,3;
- aceleração da gravidade: $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Observações:

- a força de atrito é constante durante todo o percurso do caixote;
- toda a energia fornecida pela bateria é usada para mover o caixote;
- a bateria descarrega-se totalmente em $t = 4$ s.

Diante do exposto, determine:

- a energia total fornecida pela bateria ao longo de 4 s;
- a corrente fornecida pela bateria em $t = 1,5$ s;
- a distância percorrida pelo caixote desde o início de seu deslocamento, de $t = 0$ a $t = 4$ s;
- a potência instantânea máxima fornecida pelo motor em $0 < t < 4$ s.

Gabarito

Calculamos a distância total percorrida pela área do gráfico velocidade $\times$ tempo. Com ela, determinamos o trabalho da força de atrito e aplicamos o Teorema da Energia Cinética para encontrar a energia fornecida pelo motor (bateria). Para os itens seguintes, aplicamos as equações do movimento uniformemente variado e as definições de potência mecânica e elétrica.

Etapa 1. (c) Determine a distância percorrida pelo caixote.

No gráfico $v \times t$, a distância ΔS é numericamente igual à área sob a curva. O gráfico é composto por: - Um trapézio de $t = 0$ a $t = 1$: $A_1 = \frac{(1+2) \cdot 1}{2} = 1,5$ - Um retângulo de $t = 1$ a $t = 2$: $A_2 = 2 \cdot 1 = 2$ - Um trapézio de $t = 2$ a $t = 3$: $A_3 = \frac{(2+3) \cdot 1}{2} = 2,5$ - Um trapézio de $t = 3$ a $t = 4$: $A_4 = \frac{(3+2) \cdot 1}{2} = 2,5$
A distância percorrida é a soma das áreas:

$$\Delta S = 1,5 + 2 + 2,5 + 2,5 = \boxed{8,5 \text{ m}}$$

Etapa 2. (a) Determine a energia total fornecida pela bateria.

Pelo Teorema da Energia Cinética, o trabalho total (resultante) é igual à variação da energia cinética do caixote entre $t = 0$ e $t = 4$ s. As forças que realizam trabalho no deslocamento horizontal são a força motora F_{motor} e a força de atrito cinético F_{at} .

$$W_{\text{total}} = \Delta E_{\text{cin}}$$

$$W_{\text{motor}} + W_{\text{atrito}} = E_{\text{cin},f} - E_{\text{cin},i}$$

A força de atrito é constante: $F_{\text{at}} = \mu N = \mu mg = 0,3 \cdot 2 \cdot 10 = 6 \text{ N}$. O trabalho do atrito é resistente:

$$W_{\text{atrito}} = -F_{\text{at}} \Delta S = -6 \cdot 8,5 = -51 \text{ J}$$

As energias cinéticas inicial ($v_i = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) e final ($v_f = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) são:

$$E_{\text{cin},i} = \frac{mv_i^2}{2} = \frac{2 \cdot 1^2}{2} = 1 \text{ J}$$

$$E_{\text{cin},f} = \frac{mv_f^2}{2} = \frac{2 \cdot 2^2}{2} = 4 \text{ J}$$

Substituindo na equação do Teorema da Energia Cinética:

$$W_{\text{motor}} - 51 = 4 - 1$$

$$W_{\text{motor}} = 3 + 51$$

$$W_{\text{motor}} = \boxed{54 \text{ J}}$$

Como toda a energia fornecida pela bateria é usada para mover o caixote, essa é a energia da bateria.

Etapa 3. (b) Determine a corrente fornecida pela bateria em $t = 1,5 \text{ s}$.

No instante $t = 1,5 \text{ s}$, a velocidade do caixote é constante ($v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Portanto, a aceleração é nula e a força resultante é zero.

$$F_{\text{motor}} = F_{\text{at}} = 6 \text{ N}$$

A potência mecânica do motor nesse instante é:

$$P_{\text{mec}} = F_{\text{motor}} \cdot v = 6 \cdot 2 = 12 \text{ W}$$

Como a energia da bateria vira totalmente trabalho do motor, a potência elétrica é igual à potência mecânica ($P_{\text{el}} = P_{\text{mec}}$):

$$U \cdot i = 12$$

$$10 \cdot i = 12$$

$$i = \boxed{1,2 \text{ A}}$$

Etapa 4. (d) Determine a potência instantânea máxima.

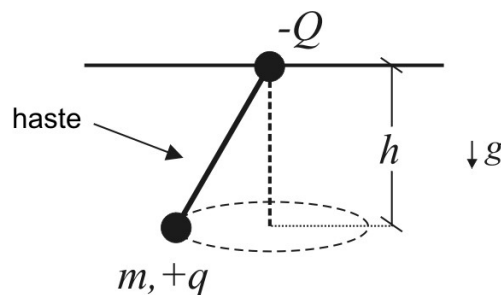
A potência mecânica fornecida é $P = F_{\text{motor}} \cdot v$. Pela Segunda Lei de Newton, $F_{\text{motor}} - F_{\text{at}} = m \cdot a \implies F_{\text{motor}} = F_{\text{at}} + m \cdot a = 6 + 2a$. Para maximizar a potência, precisamos do produto máximo. Analisando cada trecho do gráfico:

- De $t = 0$ a $t = 1 \text{ s}$: A aceleração é $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2-1}{1} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A força motora é $F_{\text{motor}} = 6 + 2(1) = 8 \text{ N}$. A velocidade máxima do trecho é $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. $P_{\text{máx}} = 8 \cdot 2 = 16 \text{ W}$.
- De $t = 1$ a $t = 2 \text{ s}$: A aceleração é nula. A força é $F_{\text{motor}} = 6 \text{ N}$. A velocidade é constante em $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. $P = 6 \cdot 2 = 12 \text{ W}$.
- De $t = 2$ a $t = 3 \text{ s}$: A aceleração é $a = \frac{3-2}{1} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A força motora é $F_{\text{motor}} = 6 + 2(1) = 8 \text{ N}$. A velocidade aumenta linearmente, atingindo seu máximo de $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ exatamente no fim do intervalo ($t \rightarrow 3^-$). $P_{\text{máx}} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ W}$.
- De $t = 3$ a $t = 4 \text{ s}$: A aceleração é negativa (frenagem), logo $F_{\text{motor}} < 6 \text{ N}$, e as velocidades são no máximo $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A potência será menor que a do trecho anterior.

Portanto, a maior potência ocorre na iminência de $t = 3 \text{ s}$:

$$P_{\text{máx}} = \boxed{24 \text{ W}}$$

Questão 10



A figura mostra uma partícula de massa m eletricamente carregada com carga $+q$ que realiza um movimento circular uniforme. Na reta normal ao plano da trajetória da partícula, passando pelo seu centro, está fixada outra partícula a uma altura h , de carga $-Q$. Ambas as partículas são unidas por uma haste.

Dados:

- massa da partícula: $m = 1,25 \text{ kg}$;
- carga da partícula em movimento: $q = 200 \text{ } \mu\text{C}$;
- carga da partícula fixa.: $-Q = -500 \text{ } \mu\text{C}$;
- altura da partícula fixa: $h = 3 \text{ m}$;
- constante elétrica do meio: $9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$;
- aceleração da gravidade: $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Observação:

- durante o movimento, a haste que une as duas partículas está com tensão/compressão nula.

A partir dos dados listados, determine:

- o ângulo resultante entre a haste e a normal ao plano da trajetória;
- a velocidade angular da partícula em movimento.

Gabarito

Como a haste não exerce força (tensão/compressão nula), a partícula de carga $+q$ está sob a ação exclusiva do seu peso e da força elétrica de atração da carga $-Q$. Decompomos a força elétrica nas direções vertical (equilibrando o peso) e horizontal (atuando como força centrípeta) para determinar a geometria do sistema e a velocidade angular.

Etapa 1. (a) Determine o ângulo resultante entre a haste e a normal.

A haste coincide com a linha que une as duas cargas, de comprimento $d = \sqrt{h^2 + R^2}$. Seja θ o ângulo entre a haste e a normal vertical. A força elétrica F_{el} atua ao longo da haste, puxando $+q$ na direção de $-Q$. No eixo vertical (y), o corpo não se move, logo a componente vertical da força elétrica equilibra a força peso:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ F_{\text{el}} \cos \theta &= P \\ F_{\text{el}} \cos \theta &= mg\end{aligned}$$

Substituindo a expressão da força elétrica, $F_{\text{el}} = \frac{kQq}{d^2} = \frac{kQq}{h^2 + R^2}$ e a relação geométrica $\cos \theta = \frac{h}{d} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{kQq}{h^2 + R^2}\right)\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right) &= mg \\ \frac{kQqh}{(h^2 + R^2)^{3/2}} &= mg\end{aligned}$$

Substituindo os valores dados: $k = 9 \times 10^9$, $Q = 500 \text{ } \mu\text{C} = 5 \times 10^{-4} \text{ C}$, $q = 200 \text{ } \mu\text{C} = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$, $h = 3 \text{ m}$, $m = 1,25 \text{ kg}$ e $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$:

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (5 \cdot 10^{-4}) \cdot (2 \cdot 10^{-4}) \cdot 3}{(3^2 + R^2)^{3/2}} = 1,25 \cdot 10$$

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 3}{(9 + R^2)^{3/2}} = 12,5$$

$$\frac{2700}{(9 + R^2)^{3/2}} = 12,5$$

$$(9 + R^2)^{3/2} = \frac{2700}{12,5} = 216$$

Extraindo a raiz cúbica e elevando ao quadrado:

$$9 + R^2 = \sqrt[3]{216}^2$$

$$9 + R^2 = 6^2 = 36$$

$$R^2 = 27$$

$$R = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

Com o raio R , podemos determinar o cosseno do ângulo:

$$\cos \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{9 + 27}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Portanto, o ângulo é:

$$\theta = \boxed{60^\circ}$$

Etapas 2. (b) Determine a velocidade angular da partícula em movimento.

A componente horizontal da força elétrica atua como a resultante centrípeta que mantém a partícula no movimento circular de raio R :

$$\sum F_x = F_{cp}$$

$$F_{el} \sin \theta = m\omega^2 R$$

Sabemos que $F_{el} \cos \theta = mg$. Dividindo a equação do eixo x pela do eixo y :

$$\frac{F_{el} \sin \theta}{F_{el} \cos \theta} = \frac{m\omega^2 R}{mg}$$

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 R}{g}$$

Substituindo $\theta = 60^\circ$, $R = 3\sqrt{3} \text{ m}$ e $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$:

$$\tan(60^\circ) = \frac{\omega^2(3\sqrt{3})}{10}$$

$$\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \omega^2}{10}$$

$$1 = \frac{3\omega^2}{10}$$

$$\omega^2 = \frac{10}{3}$$

$$\omega = \boxed{\sqrt{\frac{10}{3}} \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$