

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Dado $P(x) = \operatorname{cosec}^2(a) \cdot x^2 - \cotg(a) \cdot x + \cos(a)$.

Para que valores de a , no intervalo $(0, \pi)$, as raízes de $P(x)$ são reais?

Gabarito

Para que as raízes do polinômio do segundo grau sejam reais, o seu discriminante deve ser maior ou igual a zero.

Etapa 1. Analise o discriminante de $P(x)$.

A condição para que as raízes sejam reais é $\Delta \geq 0$.

$$\cotg^2(a) - 4 \operatorname{cosec}^2(a) \cos(a) \geq 0$$

Escrevendo em função de seno e cosseno:

$$\frac{\cos^2(a)}{\sin^2(a)} \geq \frac{4 \cos(a)}{\sin^2(a)}$$

$$\cos^2(a) - 4 \cos(a) \geq 0$$

$$\cos(a)(\cos(a) - 4) \geq 0$$

Como $a \in (0, \pi)$, $\sin(a) \neq 0$. A inequação é satisfeita quando $\cos(a) \leq 0$ ou $\cos(a) \geq 4$. Como o valor do cosseno está limitado ao intervalo $[-1, 1]$, a única condição possível é $\cos(a) \leq 0$.

Para $a \in (0, \pi)$, isso ocorre quando:

$$\frac{\pi}{2} \leq a < \pi$$

Questão 2

A equação $x^3 - ax + \beta = 0$, onde a e β são constantes reais, admite raiz não real de módulo γ .

Determine a em função de β e γ .

Gabarito

Como a equação possui coeficientes reais, suas raízes complexas não reais ocorrem em pares conjugados. Utilizando as relações de Girard, é possível relacionar os coeficientes com as raízes e obter a expressão pedida.

Etapa 1. Determine as raízes e as relações de Girard.

Seja t a raiz real e $a+bi$ e $a-bi$ as raízes complexas conjugadas. Como o módulo das raízes não reais é γ , temos que $a^2 + b^2 = \gamma^2$. Pelas relações de Girard para a soma das raízes:

$$t + (a + bi) + (a - bi) = 0$$

$$t + 2a = 0$$

$$t = -2a$$

(I)

Para o produto das raízes:

$$\begin{aligned} t(a + bi)(a - bi) &= -\beta \\ t(a^2 + b^2) &= -\beta \\ ty^2 &= -\beta \\ t &= -\frac{\beta}{y^2} \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Etapa 2. Determine a .

Pela relação de Girard para a soma dos produtos das raízes duas a duas:

$$\begin{aligned} t(a + bi) + t(a - bi) + (a + bi)(a - bi) &= -a \\ 2at + a^2 + b^2 &= -a \\ 2at + y^2 &= -a \end{aligned}$$

Substituindo (I) e (II):

$$\begin{aligned} -a &= 2\left(-\frac{t}{2}\right)t + y^2 \\ -a &= -t^2 + y^2 \\ a &= \left(-\frac{\beta}{y^2}\right)^2 - y^2 \\ a &= \frac{\beta^2}{y^4} - y^2 \end{aligned}$$

Questão 3

Há três casas numeradas pelos números naturais k , m e n , onde $0 < k < m < n$. Três pessoas A , B e C as alugam por temporada com ocupação por sorteio. A cada sorteio cada pessoa recebe um valor em reais correspondente ao número da casa a si alocada. Depois do último sorteio A , B e C têm, acumulado, respectivamente, 10, 9 e 14 reais. Sabe-se que foram realizados pelo menos 2 sorteios e que no último deles B recebeu n reais.

Quais são os números das casas?

Gabarito

O total arrecadado por todas as pessoas ao longo de todas as rodadas é múltiplo da soma dos valores das três casas. Essa relação, combinada às condições do enunciado, permite determinar o número de rodadas e testar os possíveis valores para as casas.

Etapa 1. Determine o número de rodadas.

Seja a o número de sorteios (rodadas). A cada rodada, a soma dos valores distribuídos é $k + m + n$. Então, o valor total distribuído nos sorteios é o produto do número de rodadas pela soma dos valores das casas:

$$\begin{aligned} a(k + m + n) &= 10 + 9 + 14 \\ a(k + m + n) &= 33 \end{aligned}$$

Logo, a é um divisor natural de 33. O enunciado estabelece que $a \geq 2$. Além disso, como $0 < k < m < n$ em números naturais, temos que $k \geq 1$, $m \geq 2$ e $n \geq 3$. Daí, a soma atende a $k + m + n \geq 6$. A única combinação de fatores que satisfaz essas condições é $a = 3$ e $k + m + n = 11$.

Etapa 2. Estabeleça relações entre as casas.

Como a soma de todos é $k + m + n = 11$ e B acumulou 9 reais em 3 sorteios, ele não poderia ter tirado todas as casas. Sabendo que no último sorteio B recebeu n , nas outras duas rodadas ele só pode ter recebido k e k , pois a soma precisa ser estritamente menor do que os 11 totais. Logo, a única possibilidade para os recebimentos de B é k , k e n .

A soma de B implica que $2k + n = 9$. Substituindo n na soma das casas:

$$k + m + (9 - 2k) = 11$$

$$m - k + 9 = 11$$

$$m - k = 2$$

Logo, $m = k + 2$ e $n = 9 - 2k$. Da condição de que $m < n$:

$$k + 2 < 9 - 2k$$

$$3k < 7$$

Como k é natural e $k \geq 1$, as únicas possibilidades são $k = 1$ e $k = 2$.

Etapa 3. Caso 1: $k = 1$

Se $k = 1$, temos $m = 3$ e $n = 7$.

Como todos os valores são ímpares, a soma de 3 valores recebidos por qualquer pessoa ao longo das 3 rodadas resultaria em um número ímpar. Entretanto, A acumulou um total par (10), assim como C (14). Logo, esse caso não é possível.

Etapa 4. Caso 2: $k = 2$

Se $k = 2$, temos $m = 4$ e $n = 5$.

Este caso funciona. Segue uma possível distribuição dos sorteios: - 1ª rodada: A recebe 4, B recebe 2, C recebe 5; - 2ª rodada: A recebe 4, B recebe 2, C recebe 5; - 3ª rodada: A recebe 2, B recebe 5, C recebe 4.

Os valores acumulados batem com o enunciado: A tem $4 + 4 + 2 = 10$, B tem $2 + 2 + 5 = 9$ e C tem $5 + 5 + 4 = 14$. Portanto:

$$\text{Casas} = \boxed{2, 4 \text{ e } 5}$$

Questão 4

Determine as raízes complexas da equação abaixo, onde $i^2 = -1$.

$$\frac{x^2 + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}{x - 1} = \frac{16}{(x^2 - 1)^2}$$

Gabarito

O produto das duas frações pode ser simplificado multiplicando os numeradores e os denominadores. Após essa simplificação, a equação se reduz a uma igualdade polinomial que pode ser resolvida pela radiciação de números complexos.

Etapa 1. Simplifique a equação.

O produto dos denominadores resulta no produto notável da soma pela diferença:

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

O produto dos numeradores pode ser calculado aplicando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x^2 + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) &= x^4 + x^2 \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= x^4 + x^2(1) + \frac{1^2 - (i\sqrt{3})^2}{4} \\ &= x^4 + x^2 + \frac{1 - (-3)}{4} \\ &= x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na equação original:

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{16}{(x^2 - 1)^2}$$

Etapla 2. Encontre as raízes da equação simplificada.

Assumindo $x^2 \neq 1$, podemos multiplicar ambos os lados da equação por $(x^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= \frac{16}{x^2 - 1} \\ (x^4 + x^2 + 1)(x^2 - 1) &= 16 \\ x^6 - 1 &= 16 \\ x^6 &= 17 \end{aligned}$$

O número complexo 17 pode ser escrito na forma trigonométrica como $17 \operatorname{cis}(0)$. Extraíndo as raízes sextas:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[6]{17} \operatorname{cis}\left(\frac{0 + 2k\pi}{6}\right) \\ x &= \sqrt[6]{17} \operatorname{cis}\left(\frac{k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

Questão 5

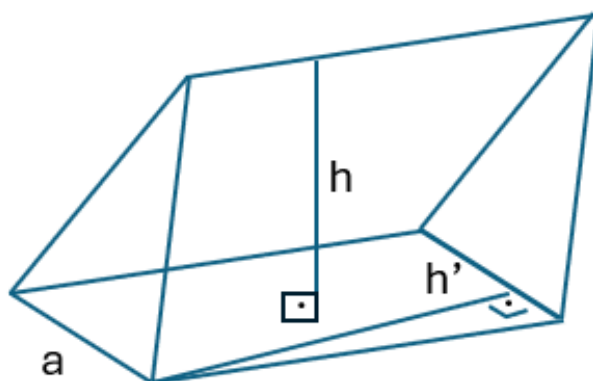
Prove que o volume de um prisma triangular é igual ao semiproduto da área de uma face lateral pela distância desta face à sua aresta oposta.

Gabarito

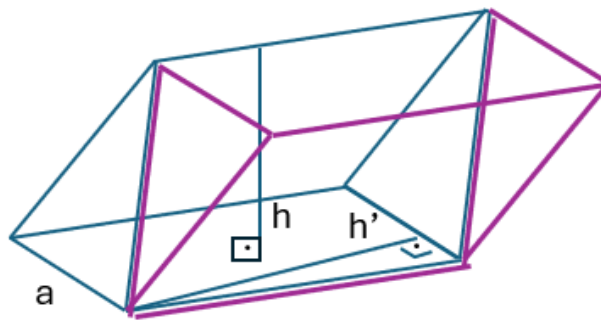
A demonstração geométrica pode ser feita construindo um paralelepípedo a partir da justaposição de dois prismas triangulares idênticos.

Etapla 1. Relacione o volume do prisma ao do paralelepípedo.

Considere o prisma triangular abaixo, onde h é a distância de uma face lateral à aresta oposta, a é uma aresta dessa face lateral e h' é a altura da mesma face lateral em relação a a :



Duplicando o prisma e justapondo-o ao original pela face lateral de área $a \cdot h'$, formamos um paralelepípedo, como mostrado a seguir:



O paralelepípedo formado possui como base o paralelogramo correspondente à face lateral original (de área $a \cdot h'$) e altura correspondente a h .

Etapa 2. Conclua a demonstração.

O volume do prisma original é metade do volume do paralelepípedo. Como o volume de um paralelepípedo é o produto da área da sua base pela sua altura:

$$V_{\text{prisma}} = \frac{1}{2} V_{\text{paralelepípedo}}$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(a \cdot h')}_{\text{área da face lateral}} \cdot \underbrace{h}_{\text{distância da face lateral à aresta oposta}}$$

Portanto, a relação está demonstrada.

Questão 6

Sejam as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 3 \\ \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 & -2 \\ 2 & -1/2 & \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) \\ 1/2 & \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) & -1/2 \end{bmatrix}$$

Determine os valores de x pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ tais que $\det(2AB + A - 2B - I) = 0$.

Gabarito

A expressão matricial pode ser fatorada como o produto de duas matrizes. Pelo teorema de Binet, o determinante do produto é o produto dos determinantes, o que nos permite analisar cada fator separadamente.

Etapa 1. Fatore a expressão matricial.

A matriz $2AB + A - 2B - I$ pode ser fatorada por agrupamento:

$$2AB + A - 2B - I = A(2B + I) - (2B + I) \\ = (A - I)(2B + I)$$

A condição do problema é que o determinante dessa matriz seja nulo. Aplicando o teorema de Binet:

$$\det(2AB + A - 2B - I) = 0 \\ \det((A - I)(2B + I)) = 0 \\ \det(A - I) \cdot \det(2B + I) = 0$$

Isso significa que $\det(A - I) = 0$ ou $\det(2B + I) = 0$. Analisaremos cada caso.

Etapa 2. Caso 1: $\det(A - I) = 0$



Subtraindo a matriz identidade de A e calculando o determinante:

$$\begin{aligned}\det(A - I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 0 & \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 3 \\ \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} &= 0 \\ -2 \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) - 3 \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) &= 0 \\ -5 \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) &= 0\end{aligned}$$

Para que o seno seja nulo, o arco deve ser um múltiplo inteiro de π :

$$\begin{aligned}\frac{4x+\pi}{8} &= k\pi \\ 4x+\pi &= 8k\pi \\ x &= 2k\pi - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Para que $x \in [0, 2\pi]$, devemos ter $k = 1$, o que resulta em $x = \frac{7\pi}{4}$.

Etapla 3. Caso 2: $\det(2B + I) = 0$

Somando a matriz identidade a $2B$ e calculando o determinante:

$$\begin{aligned}\det(2B + I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) \\ 1 & 2 \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) & 0 \end{bmatrix} &= 0 \\ 12 \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) - 32 \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) &= 0 \\ -20 \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) &= 0\end{aligned}$$

Para que o seno seja nulo:

$$\begin{aligned}\frac{4x-\pi}{8} &= k\pi \\ 4x-\pi &= 8k\pi \\ x &= 2k\pi + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Para que $x \in [0, 2\pi]$, devemos ter $k = 0$, o que resulta em $x = \frac{\pi}{4}$.

Etapla 4. Determine o conjunto de soluções.

Juntando as soluções obtidas em ambos os casos:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

**Questão 7**

Considere o polinômio $P(x) = \left(\frac{x^{2025} - 1}{x - 1} \right)^{2025}$.

Determine o coeficiente de x^3 em $P(x)$.

Gabarito

O termo base do polinômio é a soma de uma progressão geométrica finita. Expandindo essa soma e combinando os fatores, o coeficiente de x^3 pode ser obtido somando as diferentes maneiras de formar o expoente 3.

Etapla 1. Reescreva o polinômio como soma de potências.

A base do polinômio corresponde à fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica de razão x :

$$P(x) = \left(\frac{x^{2025} - 1}{x - 1} \right)^{2025}$$
$$P(x) = (x^{2024} + x^{2023} + \dots + x^2 + x + 1)^{2025}$$

Ao expandir o produto dos 2025 fatores, o termo em x^3 será formado pelas combinações de escolhas cujos expoentes somem 3. Os termos de grau maior que 3 de cada fator nunca contribuirão para o expoente 3, logo a análise se restringe às escolhas de x^3 , x^2 , x e 1.

Etapla 2. Determine as combinações para formar x^3 .

O expoente total 3 pode ser obtido de três formas diferentes:

Etapla 3. Caso 1: Escolhendo um fator x^3

Para formar x^3 , podemos escolher o termo x^3 em exatamente 1 dos fatores e o termo 1 nos 2024 fatores restantes. O número de combinações é:

$$\binom{2025}{1} = 2025$$

Etapla 4. Caso 2: Escolhendo um fator x^2 e um fator x

Podemos escolher o termo x^2 em 1 fator, o termo x em 1 fator e o termo 1 nos 2023 fatores restantes. O número de maneiras de fazer essa escolha é:

$$\binom{2025}{1} \cdot \binom{2024}{1} = 2025 \cdot 2024 = 4098600$$

Etapla 5. Caso 3: Escolhendo três fatores x

Podemos escolher o termo x em 3 fatores e o termo 1 nos 2022 fatores restantes. As escolhas possíveis são:

$$\binom{2025}{3} = \frac{2025 \cdot 2024 \cdot 2023}{6} = 1381911300$$

Etapla 6. Calcule o coeficiente final.

O coeficiente de x^3 é a soma das contribuições de cada um dos casos:

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente} &= 2025 + 4098600 + 1381911300 \\ &= \boxed{1386011925} \end{aligned}$$

Questão 8

Seja α uma semicircunferência de diâmetro AB contida no primeiro quadrante, sendo $A = (0, 0)$ e $B = (x_B, 0)$. A reta t tangencia α no ponto $T = (x_T, y_T)$ e intercepta o eixo x no ponto $C = (x_C, 0)$, $x_C > x_B$. Com o centro em T , traça-se uma circunferência de raio TH , $H = (x_T, 0)$. Essa circunferência corta a reta t nos pontos $D = (x_D, y_D)$ e $E = (x_E, y_E)$. Sabe-se que $x_D < x_B < x_E$, $BC = 5$ e $HB = 4$.

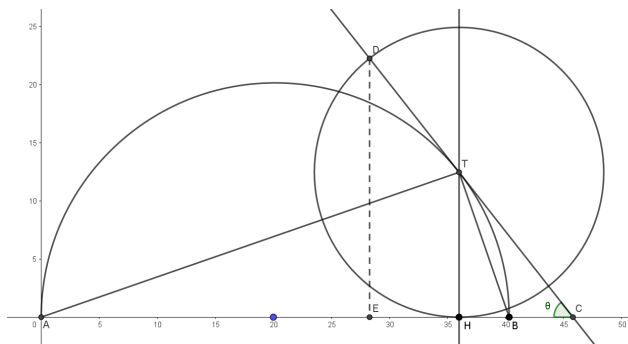
Determine as coordenadas de D .

Gabarito

O raio da semicircunferência pode ser determinado aplicando relações métricas no triângulo retângulo inscrito e o Teorema de Pitágoras nos triângulos formados pelo centro, a projeção e a reta tangente. Com as medidas dos segmentos e as razões trigonométricas da reta, as coordenadas do ponto D são calculadas por projeção nos eixos.

Etapa 1. Analise a geometria do problema.

A semicircunferência α tem diâmetro AB sobre o eixo x , com $A = (0, 0)$ e $B = (x_B, 0)$. Seja R o raio de α , logo o centro é $O = (R, 0)$ e $AB = 2R$. A reta t tangencia α em T , de modo que o raio OT é perpendicular a t . A projeção ortogonal de T no eixo x é H , e é dado que $HB = 4$.



O triângulo ATB é inscrito na semicircunferência de diâmetro AB , logo é retângulo em T . A altura relativa à hipotenusa é TH . Aplicando as relações métricas no triângulo retângulo ATB :

$$TH^2 = AH \cdot HB$$

$$TH^2 = (2R - 4) \cdot 4$$

O ponto C está no eixo x , com $BC = 5$. A distância do centro O até C é:

$$OC = OB + BC = R + 5$$

No triângulo retângulo OTC , reto em T , aplicamos o Teorema de Pitágoras:

$$TC^2 + R^2 = OC^2$$

$$TC^2 + R^2 = (R + 5)^2$$

$$TC^2 = 10R + 25$$

Etapa 2. Determine o raio da semicircunferência.

No triângulo retângulo THC , reto em H , aplicamos o Teorema de Pitágoras. Como $HC = HB + BC = 4 + 5 = 9$:

$$TC^2 = TH^2 + HC^2$$

$$10R + 25 = (2R - 4) \cdot 4 + 9^2$$

$$10R + 25 = 8R - 16 + 81$$

$$2R = 40$$

$$R = 20$$

Etapa 3. Calcule os comprimentos dos segmentos.

Substituindo $R = 20$ nas expressões encontradas:

$$TC = \sqrt{10(20) + 25} = 15$$

$$TH = \sqrt{(2(20) - 4) \cdot 4} = 12$$



A circunferência de centro T tem raio TH , logo $TD = TH = 12$. Pela disposição dos pontos na reta, T encontra-se entre D e C . A distância de D até C é a soma dos comprimentos:

$$DC = DT + TC = 12 + 15 = 27$$

Etapa 4. Determine as coordenadas de D .

Seja $\theta = \angle DCA$ a inclinação da reta t com o eixo x . Do triângulo retângulo THC :

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{TH}{TC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \\ \cos(\theta) &= \frac{HC}{TC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

A ordenada de D é a projeção vertical do segmento DC :

$$\begin{aligned}y_D &= DC \cdot \sin(\theta) \\ y_D &= 27 \cdot \frac{4}{5} \\ y_D &= \frac{108}{5}\end{aligned}$$

A abscissa é a posição de C menos a projeção horizontal de DC . O ponto C tem abscissa $x_C = 2R + BC = 40 + 5 = 45$:

$$\begin{aligned}x_D &= x_C - DC \cdot \cos(\theta) \\ x_D &= 45 - 27 \cdot \frac{3}{5} \\ x_D &= \frac{225 - 81}{5} \\ x_D &= \frac{144}{5}\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas pedidas são:

$$D = \left(\frac{144}{5}, \frac{108}{5} \right)$$

Questão 9

Sejam 3 pontos colineares A , B e C tais que $AB \neq BC$. Cada par de circunferências de mesmo raio, uma passando por A e B e outra por B e C , se interceptam em B e M .

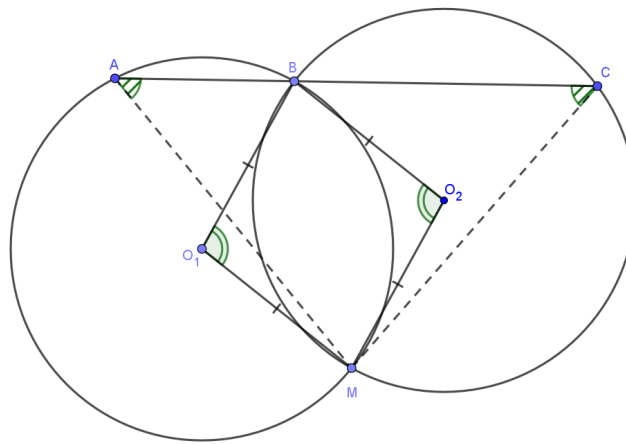
Determine o lugar geométrico do ponto M .

Gabarito

O problema pode ser resolvido puramente por propriedades angulares de quadriláteros e circunferências ou por meio de coordenadas geométricas. Em ambas as abordagens, constata-se que o ponto M descreve a mediatriz do segmento AC .

Etapa 1. Solução 1: Geometria plana

Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências que passam por A , B e B , C , respectivamente. Como as duas circunferências têm o mesmo raio e se interceptam em B e M , a distância de ambos os centros a B e a M é igual ao raio.



O quadrilátero BO_1MO_2 possui os quatro lados congruentes, configurando um losango. Portanto, seus ângulos opostos são iguais:

$$\angle MO_2B = \angle BO_1M$$

O ângulo $\angle MAB$ é inscrito na circunferência de centro O_1 e subentende o arco BM . Logo, ele mede metade do ângulo central correspondente:

$$\angle MAB = \frac{1}{2} \angle MO_1B$$

Analogamente, o ângulo $\angle MCB$ é inscrito na circunferência de centro O_2 e subentende o arco BM , resultando em:

$$\angle MCB = \frac{1}{2} \angle MO_2B$$

Como os ângulos centrais são iguais, concluímos que os ângulos inscritos também são iguais:

$$\angle MAB = \angle MCB$$

Com dois ângulos da base congruentes, o triângulo AMC é isósceles com base AC . Como M é equidistante de A e de C , ele deve pertencer à mediatriz do segmento AC . Assim, o lugar geométrico do ponto M é a reta mediatriz de AC .

Etapa 2. Solução 2: Geometria analítica

Como os pontos A , B e C são colineares, podemos alinhá-los sobre o eixo das abscissas. Sejam as coordenadas $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (c, 0)$.

O centro O_1 da circunferência que passa por A e B deve estar sobre a mediatriz do segmento AB , de modo que sua abscissa é a média aritmética das abscissas de A e B . O mesmo vale para O_2 em relação a B e C :

$$O_1 = \left(\frac{a+b}{2}, y_1 \right) \quad \text{e} \quad O_2 = \left(\frac{b+c}{2}, y_2 \right)$$

O quadrilátero MO_1BO_2 é um losango e, consequentemente, um paralelogramo. Em um paralelogramo, as diagonais se interceptam no ponto médio de ambas, o que significa que a soma das coordenadas de vértices opostos é igual. Aplicando essa propriedade à coordenada x :

$$\begin{aligned} x_M + x_B &= x_{O_1} + x_{O_2} \\ x_M + b &= \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} \\ x_M + b &= \frac{a+2b+c}{2} \\ x_M &= \frac{a+c}{2} \end{aligned}$$

Como a abscissa do ponto M é sempre a média aritmética das abscissas de A e C , M pertence à reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto médio do segmento AC . Logo, independentemente dos raios e das ordenadas dos centros:

$$\text{Lugar geométrico} = \boxed{\text{Mediatriz do segmento } AC}$$

Questão 10

Considere o seguinte subconjunto A do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z-1}{z+1} \right|^n \leq k-1 \right\},$$

onde $k > 1$ é um número real dado.

Determine o valor máximo de $|z|$ para $z \in A$.

Gabarito

O conjunto A restringe os números complexos z pela convergência e pelo valor de uma série geométrica infinita. O problema pode ser resolvido manipulando a desigualdade resultante da série geométrica por meio de representação algébrica ou pelas propriedades do módulo complexo.

Etapa 1. Solução 1: Geometria Analítica

A condição do conjunto A é dada pela série geométrica de razão $q = \left| \frac{z-1}{z+1} \right|$. Para que a série convirja, sua razão deve ser estritamente menor que 1:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| &< 1 \\ |z-1| &< |z+1| \end{aligned}$$

Isso implica que a distância de z até 1 é menor que a distância de z até -1 , ou seja, z pertence ao semiplano direito, logo $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Aplicando a fórmula da soma da PG infinita com termo inicial igual à razão q :

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{z-1}{z+1} \right|}{1 - \left| \frac{z-1}{z+1} \right|} &\leq k-1 \\ \frac{|z-1|}{|z+1| - |z-1|} &\leq k-1 \end{aligned}$$

Como $|z+1| > |z-1|$, o denominador é positivo, permitindo multiplicá-lo:

$$\begin{aligned} |z-1| &\leq (k-1)(|z+1| - |z-1|) \\ |z-1| &\leq k|z+1| - |z+1| - k|z-1| + |z-1| \\ k|z-1| &\leq (k-1)|z+1| \end{aligned}$$

Seja $z = x + yi$ e $q = \frac{k-1}{k}$. Elevando a desigualdade ao quadrado:

$$\begin{aligned} |z-1|^2 &\leq q^2 |z+1|^2 \\ (x-1)^2 + y^2 &\leq q^2((x+1)^2 + y^2) \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &\leq q^2(x^2 + 2x + 1 + y^2) \\ x^2(1-q^2) + y^2(1-q^2) - 2x(1+q^2) + 1 - q^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Dividindo por $(1-q^2)$ e completando o quadrado, obtemos um círculo:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right) + y^2 + 1 &\leq 0 \\ \left(x - \frac{1+q^2}{1-q^2} \right)^2 + y^2 &\leq \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right)^2 - 1 \\ \left(x - \frac{1+q^2}{1-q^2} \right)^2 + y^2 &\leq \frac{4q^2}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$



O centro do círculo tem abscissa positiva e raio $\frac{2q}{1-q^2}$. O ponto de máximo módulo ocorre no eixo x , na extremidade direita do círculo:

$$|z|_{\text{máx}} = \frac{1+q^2}{1-q^2} + \frac{2q}{1-q^2}$$

$$|z|_{\text{máx}} = \frac{(1+q)^2}{(1-q)(1+q)}$$

$$|z|_{\text{máx}} = \frac{1+q}{1-q}$$

Substituindo $q = \frac{k-1}{k}$:

$$|z|_{\text{máx}} = \frac{1 + \frac{k-1}{k}}{1 - \frac{k-1}{k}}$$

$$|z|_{\text{máx}} = \frac{\frac{2k-1}{k}}{\frac{1}{k}}$$

$$|z|_{\text{máx}} = \boxed{2k-1}$$

Etapla 2. Solução 2: Propriedades do módulo

Desenvolvendo a série geométrica e isolando a fração como na solução anterior, obtemos:

$$k|z-1| \leq (k-1)|z+1|$$

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} \leq \frac{k-1}{k}$$

Pela desigualdade triangular, o módulo da diferença e da soma satisfazem:

$$|z-1| \geq |z|-1 \quad \text{e} \quad |z+1| \leq |z|+1$$

Isso permite construir a seguinte desigualdade para a razão:

$$\frac{|z|-1}{|z|+1} \leq \frac{|z-1|}{|z+1|}$$

Encadeando as desigualdades:

$$\frac{|z|-1}{|z|+1} \leq \frac{k-1}{k}$$

$$k(|z|-1) \leq (k-1)(|z|+1)$$

$$k|z|-k \leq k|z|+k-|z|-1$$

$$|z| \leq 2k-1$$

O limite superior é alcançado quando z , 1 e 0 estão alinhados e z é real maior que 1 , tornando as desigualdades triangulares igualdades estritas. Portanto, o valor máximo é:

$$|z|_{\text{máx}} = \boxed{2k-1}$$