

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Seja $D = \{x \mid x \in (-1, 0) \cup (0, 1)\}$, $a \in \mathbb{R}^*$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ax^{k-1}$. Então, para $m \in D$, $\frac{f(m) + f(-m)}{f(m)f(-m)}$ é igual a:

A () $\frac{1}{a}$

B () $\frac{2}{am^2}$

C () $\frac{a}{2}$

D () $\frac{2}{a}$

E () $2am^2$

Gabarito: D

A soma de uma progressão geométrica infinita fornece uma expressão para f . Essa expressão permite simplificar o quociente pedido.

Etapla 1. Calcule a soma da progressão geométrica.

Como $|x| < 1$, a série converge e tem razão x .

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \\ &= \frac{a}{1-x} \end{aligned}$$

Etapla 2. Simplifique o quociente.

Substituindo m e $-m$, obtêm-se a soma e o produto que aparecem no quociente.

$$\begin{aligned} f(m) + f(-m) &= \frac{a}{1-m} + \frac{a}{1+m} \\ &= \frac{2a}{1-m^2} \\ f(m)f(-m) &= \frac{a^2}{1-m^2} \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$ e $m \in D$, o quociente está definido e vale:

$$\begin{aligned} \frac{f(m) + f(-m)}{f(m)f(-m)} &= \frac{2a}{1-m^2} \cdot \frac{1-m^2}{a^2} \\ &= \boxed{\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

Questão 2

Uma relação binária R sobre um conjunto S é dita antissimétrica se somente se para quaisquer x e y elementos de S , sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$. O número de relações binárias antissimétricas existentes sobre um conjunto com n elementos é:

A () 2^n

B () $2^{\frac{n^2+n}{2}}$

C () $2^{n^2} \cdot 3^{\frac{n}{2}}$

D () $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

E () $2^n \cdot 3^{\frac{n^2+n}{2}}$

Gabarito: D

A relação R é um subconjunto de $S \times S$. A contagem separa os pares da diagonal dos pares formados por elementos distintos.

Etapa 1. Conte as escolhas na diagonal.

Cada um dos n pares (x, x) pode pertencer ou não a R , sem violar a antissimetria. Essas escolhas são independentes e fornecem 2^n possibilidades.

Etapa 2. Conte as escolhas entre elementos distintos.

Para cada par não ordenado $\{x, y\}$, com $x \neq y$, há três possibilidades: incluir apenas (x, y) , incluir apenas (y, x) ou não incluir nenhum deles. Incluir ambos violaria a antissimetria. O número desses pares é:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Etapa 3. Combine as escolhas independentes.

Multiplicando as possibilidades da diagonal pelas dos pares distintos, o número de relações é:

$$N = 2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

Questão 3

Sabe-se que $i^2 = -1$. Determine o menor número inteiro positivo n que satisfaça a expressão

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^n + 2i$$

A () 1

B () 2

C () 3

D () 5

E () 7

Gabarito: C

A forma trigonométrica dos complexos permite aplicar a fórmula de De Moivre e comparar as partes real e imaginária.

Etapa 1. Escreva os complexos na forma trigonométrica.

Ambos têm módulo 1. Com $\text{cis } \theta = \cos \theta + i \sin \theta$, suas potências são:

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = \text{cis}\left(\frac{5n\pi}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^n = \text{cis}\left(\frac{7n\pi}{6}\right)$$

Etapa 2. Compare as partes real e imaginária.

A diferença entre as potências deve ser $2i$. Portanto:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{7n\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{7n\pi}{6}\right) &= 2 \end{aligned}$$

Como o seno pertence ao intervalo $[-1, 1]$, a segunda igualdade exige que os senos sejam 1 e -1 , respectivamente. Nessas condições, ambos os cossenos são zero.

Etapla 3. Determine o menor inteiro positivo.

A condição sobre o primeiro seno fornece, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\frac{5n\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 5n &= 3 + 12k \\ n &= \frac{3 + 12k}{5}\end{aligned}$$

Para n ser inteiro, $k = 1 + 5t$, com $t \in \mathbb{Z}$, o que dá $n = 3 + 12t$. O menor valor positivo é 3. Nesse caso, os ângulos são $5\pi/2$ e $7\pi/2$, que satisfazem todas as condições.

$$n = \boxed{3}$$

Questão 4

Sabe-se que $i^2 = -1$ e $\arg(z)$ é o argumento do complexo z .

Sejam $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 12 + 5i$. O complexo z_3 é tal que $|z_3 - z_2| = 5$ e $\left| \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1}\right) \right| = \frac{\pi}{2}$.

O maior valor possível de $z_3 \cdot \overline{z_3}$ é:

A () 82

B () 128

C () 260

D () 306

E () 320

Gabarito: C

As condições de módulo e argumento determinam dois valores de z_3 . Basta comparar seus módulos ao quadrado.

Etapla 1. Determine os dois valores de z_3 .

Como $|z_1| = 5$, o quociente $(z_3 - z_2)/z_1$ tem módulo 1 e argumento $\pm\pi/2$. Logo, ele vale $\pm i$.

$$\begin{aligned}z_3 - z_2 &= \pm iz_1 \\ z_3 &= 12 + 5i \pm i(3 + 4i)\end{aligned}$$

Para o sinal positivo:

$$\begin{aligned}z_3 &= 12 + 5i + 3i - 4 \\ &= 8 + 8i\end{aligned}$$

Para o sinal negativo:

$$\begin{aligned}z_3 &= 12 + 5i - 3i + 4 \\ &= 16 + 2i\end{aligned}$$

Etapla 2. Compare os módulos ao quadrado.

O produto de um complexo por seu conjugado é o quadrado de seu módulo. Nos dois casos:

$$\begin{aligned}|8 + 8i|^2 &= 8^2 + 8^2 \\ &= 128 \\ |16 + 2i|^2 &= 16^2 + 2^2 \\ &= 260\end{aligned}$$

Portanto, o maior valor possível de $z_3 \overline{z_3}$ é $\boxed{260}$.



Questão 5

Sabe-se que $i^2 = -1$. A equação polinomial $x^5 + x^4 + 7x^3 + 26x^2 + 26x + 20 = 0$ possui uma raiz em $x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

A quantidade de raízes reais dessa equação é:

A () 4

B () 3

C () 2

D () 1

E () 0

Gabarito: D

A raiz complexa dada e sua conjugada determinam um fator quadrático. A fatoração restante permite contar as raízes reais.

Etapa 1. Identifique o fator quadrático.

Os coeficientes do polinômio são reais. Portanto, a conjugada da raiz dada também é raiz. A forma trigonométrica correta da raiz é:

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

O produto dos fatores associados às duas raízes conjugadas é $x^2 + x + 1$.

Etapa 2. Fatore o polinômio por agrupamento.

Denotando o polinômio por $P(x)$, o agrupamento dos termos fornece:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3(x^2 + x + 1) \\ &\quad + 6x(x^2 + x + 1) \\ &\quad + 20(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 + 6x + 20) \end{aligned}$$

Como -2 é raiz do fator cúbico, a fatoração completa é:

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 10)$$

Etapa 3. Conte as raízes reais.

Os fatores quadráticos têm discriminantes -3 e -36 , respectivamente. Assim, a única raiz real é -2 , e a quantidade pedida é **1**.

Questão 6

Qual desses produtos não pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos?

A () $2023 \cdot 2024$ B () $2023 \cdot 2025$ C () $2024 \cdot 2025$ D () $2024 \cdot 2026$ E () $2025 \cdot 2026$ **Gabarito: E**

A diferença de quadrados se decompõe em dois fatores de mesma paridade. Essa condição permite analisar os produtos apresentados.

Etapa 1. Estabeleça a condição de paridade.

Para inteiros x e y , vale $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Se os fatores forem $p = x + y$ e $q = x - y$, então:

$$x = \frac{p+q}{2}$$

$$y = \frac{p-q}{2}$$

Logo, x e y são inteiros quando p e q têm a mesma paridade.

Etapla 2. Verifique os produtos que admitem a decomposição.

Em B, os dois fatores são ímpares; em D, ambos são pares. Os produtos A e C podem ser reescritos com dois fatores pares:

$$2023 \cdot 2024 = 4046 \cdot 1012$$

$$2024 \cdot 2025 = 4050 \cdot 1012$$

Portanto, A, B, C e D podem ser escritos como diferenças de quadrados perfeitos.

Etapla 3. Identifique o produto que não admite a decomposição.

O produto da alternativa E contém exatamente um fator 2:

$$2025 \cdot 2026 = 2 \cdot 2025 \cdot 1013$$

Em qualquer decomposição desse número em dois fatores inteiros, um fator será par e o outro ímpar. A soma e a diferença dos fatores serão ímpares, impedindo que x e y sejam inteiros. O produto pedido é $2025 \cdot 2026$.

Questão 7

Sejam x, y e z inteiros positivos tais que $x + y + z = 117$. Um possível valor do produto $x \cdot y \cdot z$ é:

A () 60327

B () 60117

C () 59321

D () 59319

E () 59317

Gabarito: D

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica fornece um limite para o produto. O caso de igualdade permite identificar um valor possível.

Etapla 1. Limite o produto pela soma.

Como x, y e z são positivos:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

$$= \frac{117}{3}$$

$$= 39$$

Assim, $xyz \leq 39^3$.

Etapla 2. Verifique o caso de igualdade.

A escolha $x = y = z = 39$ satisfaz a soma exigida e atinge o limite. Portanto, um valor possível é:

$$xyz = 39^3 = 59319$$



Questão 8

Sejam as sequências crescentes S_n , $n \in \mathbb{N}^*$, formadas por n ímpares consecutivos, tais que $S_1 = (1)$, $S_2 = (3, 5)$ e S_k inicia no menor ímpar que não pertence a S_j , para todo $j < k$.

A soma de todos os termos de S_{2025} é:

- A () 2025^3 B () $2024 \cdot 2025^2$ C () $2025 \cdot 2024^2$ D () $1012 \cdot 2025^2$ E () 2024^3

Gabarito: A

A contagem dos ímpares usados nas sequências anteriores determina os extremos de S_{2025} . Depois, aplica-se a soma de uma progressão aritmética.

Etapa 1. Conte os termos anteriores a S_{2025} .

Cada sequência S_k contém k ímpares. O número de termos de S_1 até S_{2024} é:

$$\begin{aligned} N &= 1 + 2 + \cdots + 2024 \\ &= \frac{(1 + 2024) \cdot 2024}{2} \\ &= 2025 \cdot 1012 \end{aligned}$$

Etapa 2. Determine os extremos da sequência.

O ímpar de índice k é $2k - 1$. Os índices em S_{2025} vão de $N + 1$ até $N + 2025$. Logo, seus extremos são:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2N + 1 \\ a_{2025} &= 2N + 4049 \end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule a soma dos 2025 termos.

A soma é o produto do número de termos pela média dos extremos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1 + a_{2025}}{2} \cdot 2025 \\ &= (2N + 2025) \cdot 2025 \\ &= (2 \cdot 2025 \cdot 1012 + 2025) \cdot 2025 \\ &= \boxed{2025^3} \end{aligned}$$

Questão 9

Escolhe-se ao acaso 3 vértices de um cubo. A probabilidade desses vértices pertencerem a uma mesma face é:

- A () $3/7$ B () $3/8$ C () $1/3$ D () $3/10$ E () $1/4$

Gabarito: A

A probabilidade é a razão entre os trios de vértices contidos em uma face e todos os trios possíveis.

Etapa 1. Conte os trios possíveis.

O cubo possui 8 vértices. O número total de escolhas de 3 vértices é:

$$\begin{aligned}
 N &= \binom{8}{3} \\
 &= \frac{8!}{3!5!} \\
 &= 56
 \end{aligned}$$

Etapla 2. Conte os trios favoráveis e calcule a probabilidade.

Cada uma das 6 faces contém $\binom{4}{3} = 4$ trios. Nenhum trio pertence a duas faces, pois faces distintas compartilham no máximo dois vértices. Portanto:

$$\begin{aligned}
 N_f &= 6 \cdot 4 \\
 &= 24 \\
 P &= \frac{N_f}{N} \\
 &= \frac{24}{56} \\
 &= \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

Questão 10

Considere as matrizes com coeficientes reais

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde os determinantes de A , B e C formam, nesta ordem, uma progressão aritmética.

A soma de todos os valores possíveis de x é:

A () -4

B () -1

C () 1

D () 2

E () 4

Gabarito: C

Os determinantes fornecem uma equação em x quando se impõe a condição de progressão aritmética. A soma das raízes dessa equação é o valor pedido.

Etapla 1. Calcule os determinantes.

Expandindo os determinantes das três matrizes:

$$\begin{aligned}
 \det A &= x + 1 \\
 \det B &= 2(x + 1) + 1 \\
 &= 2x + 3 \\
 \det C &= (x + 1)^2 \\
 &= x^2 + 2x + 1
 \end{aligned}$$

Etapla 2. Imponha a condição de progressão aritmética.

O dobro do termo central é igual à soma dos extremos:

$$\begin{aligned}
 2 \det B &= \det A + \det C \\
 2(2x + 3) &= (x + 1) + (x^2 + 2x + 1) \\
 4x + 6 &= x^2 + 3x + 2 \\
 x^2 - x - 4 &= 0
 \end{aligned}$$

A equação tem discriminante $17 > 0$, portanto suas duas raízes são reais. Pelas relações de Girard, a soma de todos os valores possíveis de x é 1.

Questão 11

Considere o sistema de equações no qual θ é um parâmetro real.

$$\begin{cases}
 \sin(\theta)x - \cos(\theta)y - \sin(\theta)z = 2025 \\
 \cos(\theta)x + \sin(\theta)y - \cos(\theta)z = 2026 \\
 \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)x + \cos^2(\theta)y + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)z = 2030
 \end{cases}$$

O conjunto de **todos** os valores de θ que tornam o sistema impossível é:

A () $\{0\}$
 B () $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 C () $\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
 D () $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
 E () $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Gabarito: C

Um sistema impossível precisa ter determinante dos coeficientes igual a zero. Depois de encontrar os candidatos a θ , é necessário verificar a incompatibilidade das equações.

Etapla 1. Anule o determinante dos coeficientes.

Para abreviar as contas, sejam $s = \sin \theta$ e $c = \cos \theta$. Pela regra de Sarrus:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} s & -c & -s \\ c & s & -c \\ sc & c^2 & sc \end{vmatrix} \\
 &= 2s^3c + 2sc^3 \\
 &= 2sc(s^2 + c^2) \\
 &= 2sc
 \end{aligned}$$

Como $s^2 + c^2 = 1$, a condição $D = 0$ exige $s = 0$ ou $c = 0$. Isso ocorre para $\theta = k\pi/2$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Etapla 2. Verifique a incompatibilidade em cada caso.

Se $c = 0$, a terceira equação se reduz a $0 = 2030$, uma contradição.

Se $s = 0$, então $c = \pm 1$. A primeira equação fornece $y = -2025/c$, enquanto a terceira exige $y = 2030$. Esses valores são incompatíveis.

Para os demais valores de θ , o determinante é diferente de zero e o sistema tem solução única. Portanto, o conjunto pedido é:

$$\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Questão 12

O maior número real A tal que

$$A \leq \frac{\log_{\sqrt{e}}(x) - 2 \ln\left(\frac{x}{e}\right) + 6}{3 - \left|\ln\left(\frac{1}{x^5}\right)\right| + \sqrt{\ln(x^4 e^2) - 2}}, \text{ para todo } x \in [1, e),$$

onde e denota o número de Euler é:

A () $\frac{5}{2}$

B () $\frac{8}{3}$

C () $\frac{e}{2}$

D () $\frac{8}{5}$

E () $\frac{6\sqrt{e}}{5}$

Gabarito: A

As propriedades dos logaritmos simplificam a expressão. Com a substituição $u = \sqrt{\ln x}$, basta maximizar um denominador quadrático positivo.

Etapla 1. Simplifique o numerador e o denominador.

Como $x \in [1, e)$, vale $\ln x \geq 0$. Assim:

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{e}} x &= 2 \ln x \\ -2 \ln(x/e) &= -2 \ln x + 2 \\ |\ln(1/x^5)| &= 5 \ln x \\ \sqrt{\ln(x^4 e^2) - 2} &= 2\sqrt{\ln x}\end{aligned}$$

O numerador se reduz a 8. Denotando a expressão por $E(x)$, obtém-se:

$$E(x) = \frac{8}{3 - 5 \ln x + 2\sqrt{\ln x}}$$

Etapla 2. Determine o máximo do denominador.

Com $u = \sqrt{\ln x}$, tem-se $u \in [0, 1)$. O denominador é $d(u) = 3 - 5u^2 + 2u$, positivo nesse intervalo, pois $d(u) = (1 - u)(5u + 3)$. A parábola tem concavidade para baixo. Seu máximo ocorre no vértice:

$$\begin{aligned}u_v &= -\frac{2}{2(-5)} \\ &= \frac{1}{5} \\ d(u_v) &= 3 - 5\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{16}{5}\end{aligned}$$

Etapla 3. Calcule o maior limite inferior.

Como o numerador é positivo e constante, o mínimo da expressão corresponde ao máximo do denominador. Esse mínimo é atingido no domínio e fornece:

$$\begin{aligned}A_{\max} &= \frac{8}{16/5} \\ &= \boxed{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

Questão 13

Considere a hipérbole dada pela equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Sejam F e F' seus focos onde F pertence ao semi-eixo positivo e F' ao semi-eixo negativo. Seja T o ponto simétrico ao foco F em relação à assíntota de coeficiente angular positivo. O valor do raio do círculo inscrito ao triângulo $F'TF$ é:

A () 2

B () $\sqrt{3}$ C () $\sqrt{7}$ D () $\frac{3}{2}$ E () $\sqrt{6}$

Gabarito: A

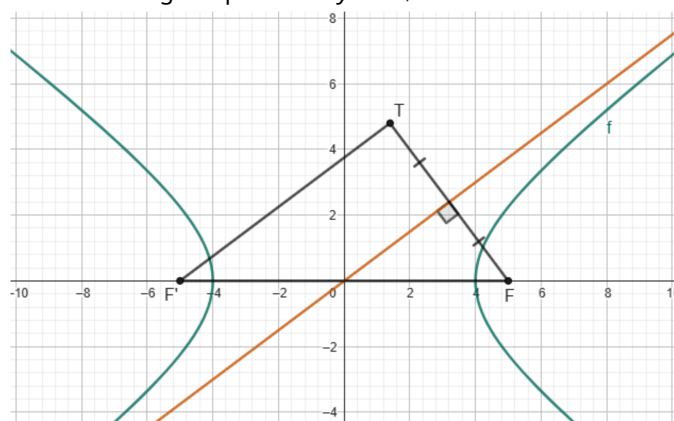
A simetria em relação à assíntota transforma o problema em um triângulo retângulo. Seus lados determinam o raio do círculo inscrito.

Etapla 1. Determine os focos e a assíntota.

Da equação da hipérbole, $a = 4$ e $b = 3$. A distância do centro a cada foco é:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Logo, $FF' = 10$, e a assíntota de coeficiente angular positivo é $y = 3x/4$.



Etapla 2. Determine os lados do triângulo.

A assíntota passa pelo ponto médio de FF' . Como T é o reflexo de F , ela também passa pelo ponto médio de FT e é perpendicular a esse segmento. Assim, contém uma base média do triângulo $F'TF$, paralela a $F'T$. O triângulo é, portanto, retângulo em T . O ângulo em F' tem tangente $3/4$, seno $3/5$ e cosseno $4/5$. Com hipotenusa 10, os catetos são:

$$\begin{aligned} FT &= 10 \cdot \frac{3}{5} \\ &= 6 \\ F'T &= 10 \cdot \frac{4}{5} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Etapla 3. Calcule o raio do círculo inscrito.

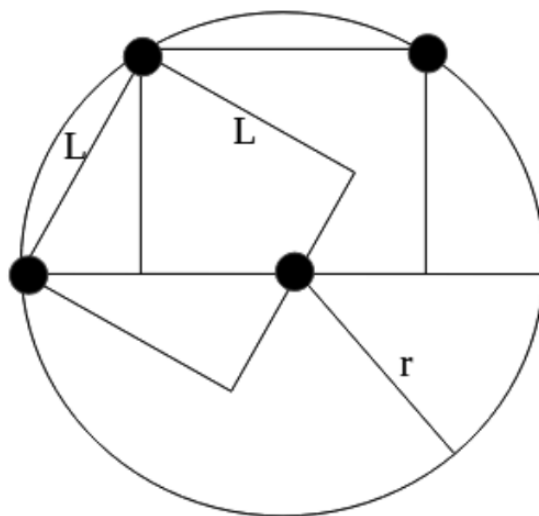
Em um triângulo retângulo, o raio inscrito é o semiperímetro menos a hipotenusa:

$$\begin{aligned} r &= \frac{10 + 8 + 6}{2} - 10 \\ &= \boxed{2} \end{aligned}$$



Questão 14

A imagem abaixo mostra um círculo de raio r , um quadrado de lado L e um retângulo. Os pontos em preto indicam o centro da circunferência e os locais de contato entre ela e as demais figuras. A área de interseção do quadrado com o retângulo abaixo é $11u^2$. O valor, em unidade u , do raio r da circunferência é:



A () 7

B () 11

C () 5

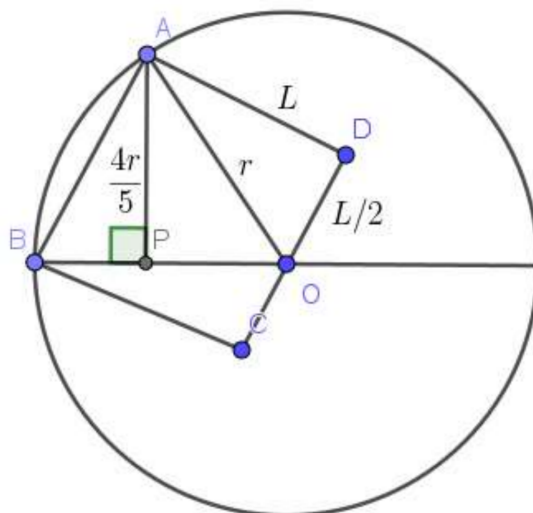
D () $\sqrt{11}$ E () $2\sqrt{11}$

Gabarito: C

As relações métricas nos triângulos da figura permitem escrever a área de interseção em função do raio.

Etapa 1. Relacione o lado do quadrado ao raio.

Adote os pontos indicados na figura de apoio, com P sendo o pé da perpendicular de A à reta BO .



Como $OA = OB = r$, o centro O está na mediatriz de AB e é o ponto médio de CD . Pelo teorema de Pitágoras no triângulo AOD :

$$\begin{aligned} L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 &= r^2 \\ L^2 &= \frac{4r^2}{5} \\ L &= \frac{2r\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Etapa 2. Calcule os segmentos AP e OP .

A área de ABO é metade da área do quadrado. Usando $OB = r$ como base:

$$\begin{aligned}\frac{r \cdot AP}{2} &= \frac{L^2}{2} \\ AP &= \frac{L^2}{r} \\ &= \frac{4r}{5}\end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras em APO :

$$\begin{aligned}OP^2 &= r^2 - AP^2 \\ &= r^2 - \left(\frac{4r}{5}\right)^2 \\ OP &= \frac{3r}{5}\end{aligned}$$

Etapla 3. Use a área de interseção.

A região $APOD$ é a união dos triângulos APO e AOD . Sua área é:

$$\begin{aligned}S &= \frac{AP \cdot OP}{2} + \frac{AD \cdot DO}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4r}{5} \cdot \frac{3r}{5} + \frac{L^2}{4} \\ &= \frac{6r^2}{25} + \frac{r^2}{5} \\ &= \frac{11r^2}{25}\end{aligned}$$

Como $S = 11u^2$ e $r > 0$, resulta $r = 5u$. O valor do raio em unidade u é 5.

Questão 15

$ABCDEF$ é um octaedro regular de aresta a , tal que suas diagonais são $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$. M é o ponto sobre a aresta $\overline{AF}$ tal que $FM = a/3$, N é o ponto sobre a aresta $\overline{AD}$ tal que $DN = a/3$ e P é o ponto sobre a aresta $\overline{DB}$ tal que $DP = a/3$. O ângulo $M\hat{N}P$ é:

A () $\frac{\pi}{4}$

B () $\frac{\pi}{3}$

C () $\frac{\pi}{2}$

D () $\frac{2\pi}{3}$

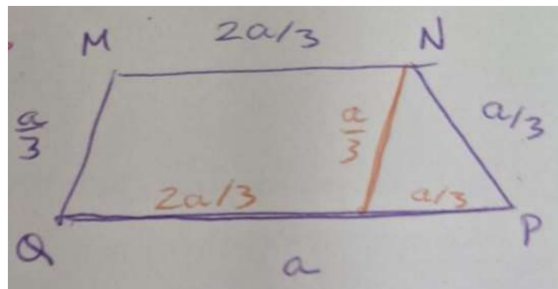
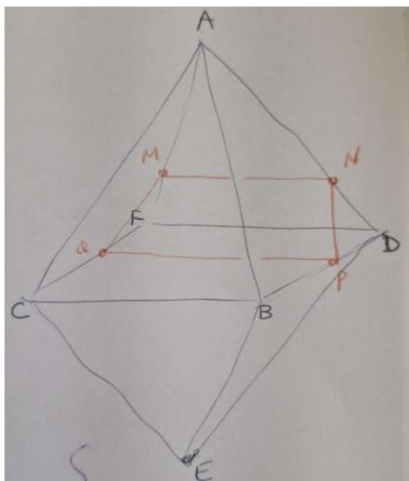
E () $\frac{3\pi}{4}$

Gabarito: D

Uma seção do octaedro forma um trapézio. A construção de um triângulo equilátero nessa seção determina o ângulo pedido.

Etapla 1. Construa a seção do octaedro.

Seja Q um ponto da aresta FC tal que $FQ = a/3$, como na figura.



Os triângulos DNP , AMN e FMQ são equiláteros, por semelhança com as faces do octaedro. Como $AM = AN = 2a/3$, tem-se $MN = 2a/3$. Além disso, $QM = NP = a/3$ e $QP = a$. Além disso, $MN \parallel FD \parallel QP$. Portanto, $MNPQ$ é um trapézio.

Etapla 2. Determine o ângulo do trapézio.

Tome $X \in QP$ com $XN \parallel MQ$, conforme a construção do trapézio na figura de apoio.

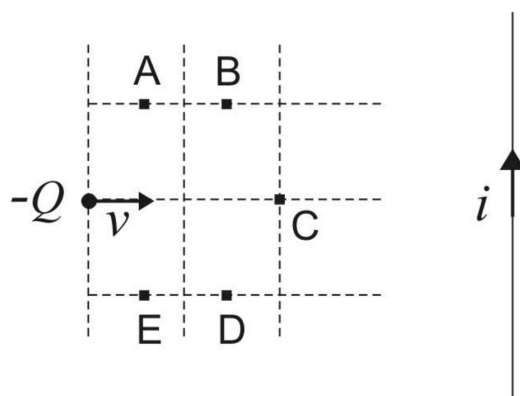
O quadrilátero $QMNX$ é um paralelogramo. Logo, $XN = QM = a/3$ e $QX = MN = 2a/3$. Assim:

$$\begin{aligned} XP &= QP - QX \\ &= a - \frac{2a}{3} \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

Como $XN = NP = XP$, o triângulo XNP é equilátero, e o ângulo do trapézio em P vale 60° . Seu suplemento é o ângulo pedido: $\angle MNP = 120^\circ = \boxed{2\pi/3}$.

GABARITO FÍSICA

Questão 16



Num determinado instante, uma partícula de carga negativa está com velocidade horizontal ortogonal a um fio infinito, por onde circula uma corrente elétrica constante, provocando na posição dela nesse instante um campo magnético de módulo B . Sabe-se que a partícula vai passar por um dos 5 pontos indicados na figura.

Observações:

- despreze os efeitos gravitacionais;
- as linhas tracejadas e o fio estão no mesmo plano;
- as linhas tracejadas desenhadas na figura definem 4 quadrados;
- caso o fio fosse substituído por um gerador de campo magnético constante de módulo B , ortogonal ao plano, a partícula descreveria uma circunferência de raio igual ao lado de cada quadrado.

A partícula passará então pelo ponto:

A () A

B () B

C () C

D () D

E () E

Gabarito: A

O sentido da força magnética determina para onde a partícula se desvia. A variação do campo com a distância ao fio permite comparar sua trajetória com a circunferência indicada no enunciado.

Etapa 1. Determine o sentido da força magnética.

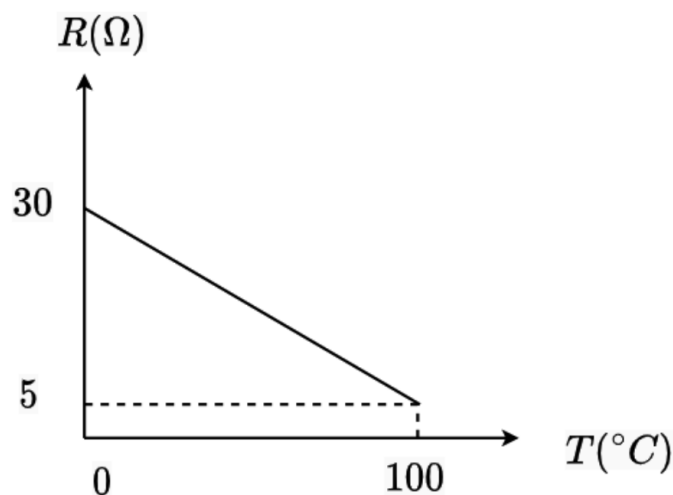
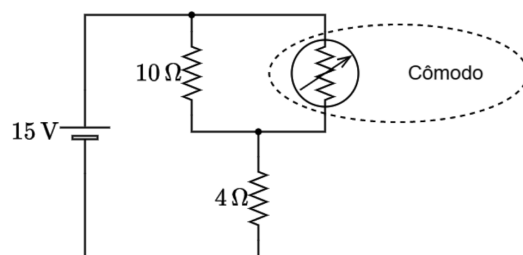
Pela regra da mão direita, o campo do fio sai do plano da figura na região da partícula. Como a velocidade aponta para a direita e a carga é negativa, a força magnética aponta inicialmente para cima.

Etapa 2. Compare a trajetória com a de um campo uniforme.

Se o campo fosse uniforme e tivesse módulo B , a partícula passaria pelo ponto médio entre A e B, após descrever um quarto de circunferência de raio igual ao lado de um quadrado.

Ao avançar para a direita, porém, a partícula se aproxima do fio, e o campo aumenta. A força magnética mantém o módulo da velocidade, mas reduz o raio de curvatura da trajetória. O desvio para cima ocorre, portanto, com menor avanço horizontal. Como o enunciado garante a passagem por um dos pontos indicados, o ponto atingido é **A**.

Questão 17



O circuito da Figura 1 é empregado para medir a temperatura de um cômodo. Um dos componentes do circuito é o termistor, que é um resistor cuja resistência varia com a temperatura. Considerando o comportamento da resistência dado pelo gráfico da Figura 2 e o fato da potência fornecida pela fonte de 15 V ser de 22,5 W, a temperatura do cômodo, em °C, é:

A () 100

B () 80

C () 60

D () 40

E () 20

Gabarito: C

A potência fornecida determina a resistência equivalente do circuito. A associação dos resistores fornece a resistência do termistor, que pode ser convertida em temperatura pelo gráfico.

Etapla 1. Calcule a resistência equivalente.

Da relação $P = U^2/R_{\text{eq}}$:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq}} &= \frac{U^2}{P} \\ &= \frac{(15\text{ V})^2}{22,5\text{ W}} \\ &= 10\ \Omega \end{aligned}$$

Etapla 2. Determine a resistência do termistor.

O resistor de $4\ \Omega$ está em série com o paralelo entre o termistor e o resistor de $10\ \Omega$. A resistência do paralelo é:

$$\begin{aligned} R_p &= R_{\text{eq}} - 4\ \Omega \\ &= 6\ \Omega \end{aligned}$$

Aplicando a relação do paralelo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_p} - \frac{1}{10\Omega} \\ &= \frac{1}{6\Omega} - \frac{1}{10\Omega} \\ R &= 15\Omega\end{aligned}$$

Etapla 3. Converta a resistência em temperatura.

O gráfico é uma reta que passa por (0, 30) e (100, 5), com temperatura em graus Celsius e resistência em ohms. Sua equação, escrita com os valores numéricos nessas unidades, é:

$$\begin{aligned}\frac{R}{\Omega} &= 30 - \frac{1}{4} \frac{T}{^{\circ}\text{C}} \\ 15 &= 30 - \frac{1}{4} \frac{T}{^{\circ}\text{C}} \\ T &= \boxed{60^{\circ}\text{C}}\end{aligned}$$

Questão 18

Considere duas máquinas térmicas onde a potência de acionamento de um ciclo de refrigeração é obtida integralmente através da potência disponibilizada por um ciclo motor.

Dados:

- temperatura de fonte quente do ciclo motor: 727°C ;
- temperatura de fonte fria do ciclo motor: 27°C ;
- temperatura de fonte quente do ciclo de refrigeração: 27°C ;
- taxa de calor rejeitado da fonte quente no ciclo motor: 800 kJ/min ;
- taxa de calor rejeitado do ciclo de refrigeração para a fonte quente: 5040 kJ/min .

Observação:

- admita que os dois ciclos são compostos por processos termodinamicamente reversíveis.

No contexto das informações acima, a temperatura da fonte fria do ciclo de refrigeração, em $^{\circ}\text{C}$, é:

A () $-1/3$

B () $9/2$

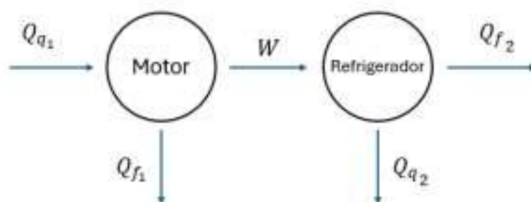
C () $22/3$

D () $-19/3$

E () $-5/2$

Gabarito: D

O rendimento do motor reversível determina a potência que aciona o refrigerador. O balanço de energia e o coeficiente de desempenho do refrigerador fornecem sua temperatura fria.



O refrigerador recebe calor da fonte fria. A seta de Q_{f2} no esquema original está invertida e deve apontar para o refrigerador.

Etapla 1. Calcule a potência fornecida pelo motor.

Convertendo as temperaturas com $T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273$, as fontes do motor estão a 1000 K e 300 K . Para o ciclo reversível:

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{T_f}{T_q} \\ &= 1 - \frac{300}{1000} \\ &= 0,7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \eta \dot{Q}_q \\ &= 0,7 \cdot 800 \text{ kJ/min} \\ &= 560 \text{ kJ/min}\end{aligned}$$

Etapla 2. Determine o calor retirado da fonte fria.

O refrigerador recebe toda a potência do motor e rejeita 5040 kJ/min para a fonte quente. Pelo balanço de energia:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{f,2} &= \dot{Q}_{q,2} - \dot{W} \\ &= 5040 \text{ kJ/min} - 560 \text{ kJ/min} \\ &= 4480 \text{ kJ/min}\end{aligned}$$

Etapla 3. Calcule a temperatura da fonte fria.

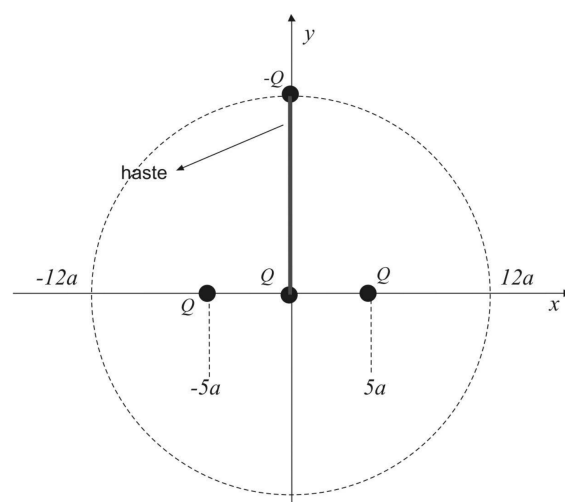
O coeficiente de desempenho reversível relaciona as taxas de energia às temperaturas absolutas:

$$\begin{aligned}\frac{T_f}{T_q - T_f} &= \frac{\dot{Q}_{f,2}}{\dot{W}} \\ \frac{T_f}{300 \text{ K} - T_f} &= \frac{4480}{560} \\ &= 8 \\ 9T_f &= 2400 \text{ K} \\ T_f &= \frac{800}{3} \text{ K}\end{aligned}$$

Convertendo para graus Celsius:

$$\begin{aligned}\theta_f &= \left(\frac{800}{3} - 273 \right) ^\circ\text{C} \\ &= \boxed{-\frac{19}{3} ^\circ\text{C}}\end{aligned}$$

Questão 19



Três partículas puntiformes de mesmas cargas positivas são fixadas, todas sobre o eixo x , no interior do círculo tracejado centrado em uma delas. Uma quarta partícula de carga negativa é fixada por uma haste isolante sobre o eixo y , seguindo a geometria indicada.

Dados:

- cargas das partículas positivas: $+Q$;
- carga da partícula negativa: $-Q$;
- constante eletrostática do meio: k .

Observação:

- despreze as forças gravitacionais.

A força de compressão na haste é:

- A** () $(1/12^2 + 24/13^3)(kQ^2/a^2)$
 B () $(1/12^2 + 2/13^2)(kQ^2/a^2)$
 C () $(1/12^2 + 5/13^3)(kQ^2/a^2)$
D () $(1/12^2 + 10/13^3)(kQ^2/a^2)$
 E () $(1/12^2 + 12/13^3)(kQ^2/a^2)$

Gabarito: A

As componentes horizontais das forças elétricas se cancelam por simetria. A compressão na haste equilibra a soma das componentes verticais.

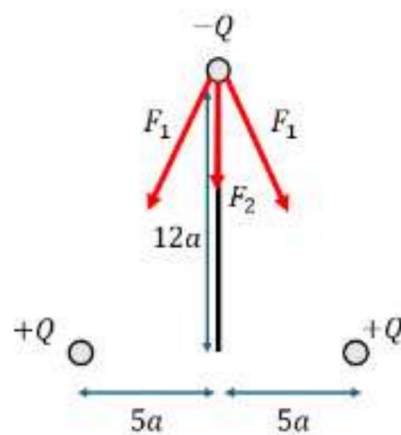
Etapas 1. Determine as forças e suas direções.

A carga central está a $12a$ da carga negativa. Cada carga lateral está à distância $\sqrt{(5a)^2 + (12a)^2} = 13a$. Pela lei de Coulomb:

$$F_1 = \frac{kQ^2}{13^2 a^2}$$

$$F_2 = \frac{kQ^2}{12^2 a^2}$$

No esquema, F_1 é a força de cada carga lateral, e F_2 é a força da carga central.

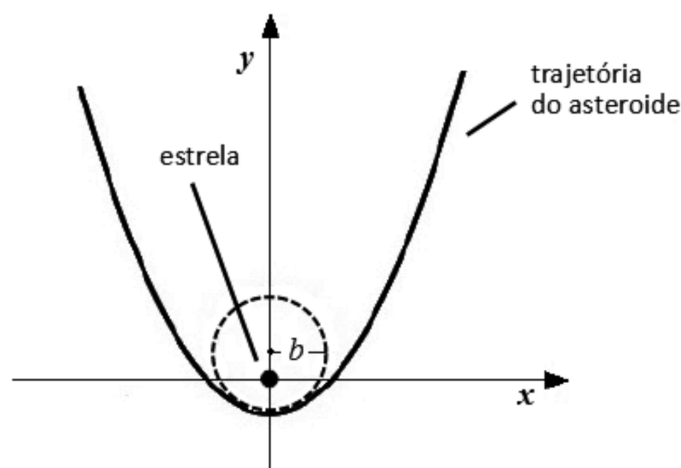


Etapas 2. Some as componentes verticais.

Se θ é o ângulo de cada força lateral com a haste, então $\cos \theta = 12/13$. A força de compressão vale:

$$\begin{aligned}
 T &= 2F_1 \cos \theta + F_2 \\
 &= 2 \cdot \frac{kQ^2}{13^2 a^2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{kQ^2}{12^2 a^2} \\
 &= \left(\frac{1}{12^2} + \frac{24}{13^3} \right) \frac{kQ^2}{a^2}
 \end{aligned}$$

Questão 20



Devido à interação gravitacional com uma estrela, localizada no ponto $(0, 0)$, um asteroide desloca-se ao longo da seguinte trajetória, indicada na figura:

$$y = \frac{x^2}{2b} - \frac{b}{2}$$

Dados:

- constante universal da gravitação: G ;
- massa da estrela: M ;
- massa do asteroide: m .

Observações:

- $M \gg m$ para que se possa considerar a estrela fixa em $(0, 0)$;
- a circunferência de raio b tem o mesmo raio de curvatura da parábola em seu vértice;
- a velocidade do asteroide para $y \gg b$ é desprezível.

A velocidade escalar do asteroide quando ele passa pelo ponto mais próximo da estrela é:

A () $\sqrt{2GM/b}$
 B () $2\sqrt{GM/b}$
 C () $\frac{1}{2}\sqrt{GM/b}$
 D () $\sqrt{GM/(2b)}$
 E () $\sqrt{GM/b}$

Gabarito: B

A conservação do momento angular relaciona as velocidades ao longo da órbita. A conservação da energia, com velocidade nula no limite distante, fornece a velocidade no ponto mais próximo.

Etapas 1. Relacione as velocidades pelo momento angular.

No vértice da parábola, a distância à estrela é $b/2$, e a velocidade $v_{\max}$ é perpendicular ao raio vetor. Em outro ponto, seja d a distância perpendicular da estrela à reta que contém a velocidade v_d . Como a força gravitacional é central:

$$\begin{aligned}
 L &= m \frac{b}{2} v_{\max} \\
 &= m d v_d \\
 v_d &= v_{\max} \frac{b}{2d}
 \end{aligned}$$

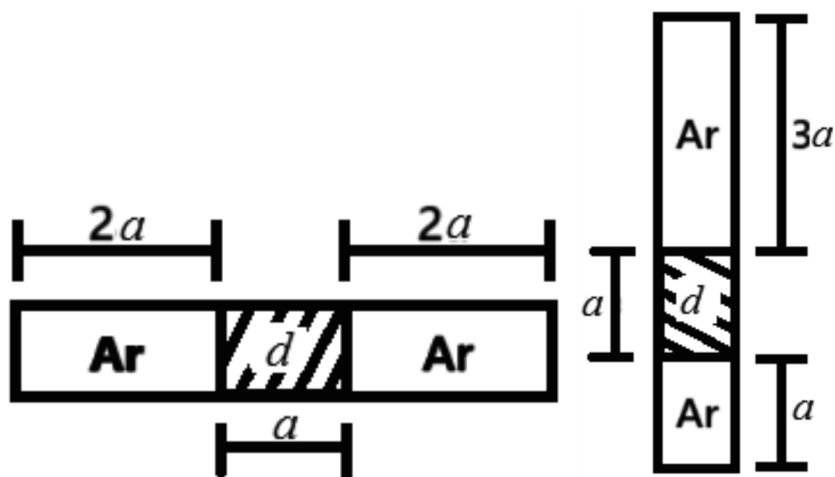
Ao longo da parábola, $d \rightarrow \infty$ nos pontos muito distantes. Assim, $v_d \rightarrow 0$, de acordo com a observação do enunciado.

Etapa 2. Conserve a energia até o ponto mais próximo.

No infinito, a energia potencial gravitacional e a energia cinética tendem a zero. A energia mecânica total é, portanto, nula. No vértice:

$$\begin{aligned}
 -\frac{GMm}{b/2} + \frac{mv_{\max}^2}{2} &= 0 \\
 \frac{mv_{\max}^2}{2} &= \frac{2GMm}{b} \\
 v_{\max}^2 &= \frac{4GM}{b} \\
 v_{\max} &= \boxed{2\sqrt{\frac{GM}{b}}}
 \end{aligned}$$

Questão 21



Um tubo capilar de comprimento $5a$ é fechado em ambas as extremidades. Ele contém ar seco, que preenche o espaço no tubo não ocupado por uma coluna de mercúrio de densidade d e comprimento a . Quando o tubo está na posição horizontal, as colunas de ar seco medem $2a$ cada. Levando lentamente o tubo para a posição vertical, sem que se passe ar de uma extremidade à outra, os comprimentos das colunas de ar tornam-se a e $3a$. Nessas condições, considerando a temperatura constante e sendo g a aceleração da gravidade, a pressão no tubo capilar, quando em posição horizontal (situação da Figura 1), é:

A () $\frac{1}{4}dga$

B () $\frac{1}{2}dga$

C () $\frac{3}{4}dga$

D () $\frac{3}{5}dga$

E () $\frac{2}{3}dga$

Gabarito: C

A transformação isotérmica relaciona a pressão inicial às pressões finais nas duas porções de ar. A diferença entre essas pressões sustenta a coluna de mercúrio.

Etapa 1. Calcule a pressão na porção superior.

Sejam p_0 a pressão inicial e V_0 o volume inicial de cada porção. O comprimento da porção superior passa de $2a$ para $3a$, de modo que seu volume final é $3V_0/2$. Pela lei de Boyle:

$$\begin{aligned}
 p_0 V_0 &= p_1 \frac{3V_0}{2} \\
 p_1 &= \frac{2}{3} p_0
 \end{aligned}$$



Etapla 2. Calcule a pressão na porção inferior.

O comprimento da porção inferior passa de $2a$ para a , e seu volume final é $V_0/2$. Portanto:

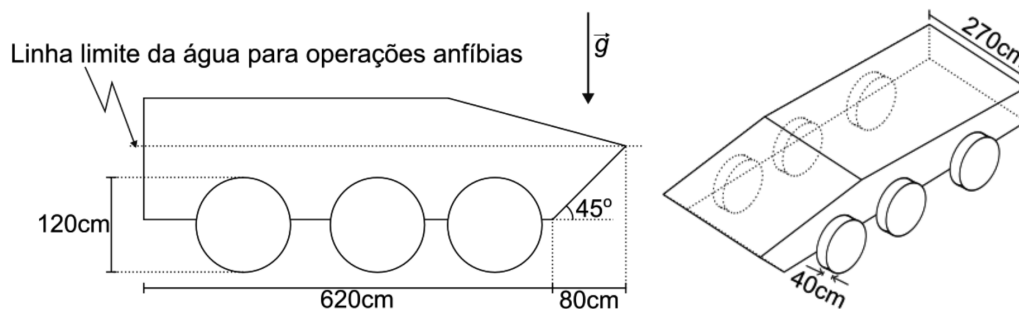
$$\begin{aligned}p_0 V_0 &= p_2 \frac{V_0}{2} \\p_2 &= 2p_0\end{aligned}$$

Etapla 3. Aplique o equilíbrio hidrostático.

A coluna de mercúrio tem altura a e densidade d . Pelo princípio de Stevin:

$$\begin{aligned}p_2 - p_1 &= dga \\2p_0 - \frac{2}{3}p_0 &= dga \\\frac{4}{3}p_0 &= dga \\p_0 &= \boxed{\frac{3}{4}dga}\end{aligned}$$

Questão 22



Um engenheiro militar precisa estimar o número de cunhetes de munição que podem ser levados para uma operação anfíbia com um veículo blindado de 6 rodas. Na operação, serão empregados 11 militares e as dimensões externas do veículo são apresentadas nas figuras acima.

Dados:

- massa média dos militares (com equipamento individual de combate): 100 kg;
- massa total do veículo blindado: 15 000 kg;
- massa de um cunhete de munição: 5 kg;
- massa específica da água: 1000 kg/m^3 ;
- aceleração da gravidade (vertical): $g = 10 \text{ m/s}^2$;
- $\pi \times 0,6^2 \times 0,4 \approx 0,45$;
- $0,8 \times 6,6 \times 2,7 \approx 14,3$.

Observações:

- desconsidere os movimentos do veículo com relação à água e as restrições volumétricas para o acondicionamento dos cunhetes de munição;
- o centro de massa do conjunto é tal que a linha limite indicada na figura esteja na horizontal e o ponto de aplicação do empuxo esteja na mesma vertical e acima do ponto de aplicação do peso.

Para que o veículo flutue sem que a água atinja a linha limite indicada em sua vista lateral, o número máximo de cunhetes de munição a serem acondicionados no veículo deverá ser de, aproximadamente:

A () 160

B () 180

C () 200

D () 220

E () 240

Gabarito: B

O empuxo no limite de imersão fixa a massa máxima do conjunto. Descontando as massas do veículo e dos militares, obtém-se a capacidade para os cunhetes.

Etapa 1. Expresse a massa total.

Se x é o número de cunhetes, a massa do conjunto é:

$$\begin{aligned} m_{\text{total}} &= 11 \cdot 100 \text{ kg} + 15\,000 \text{ kg} + x \cdot 5 \text{ kg} \\ &= (16\,100 + 5x) \text{ kg} \end{aligned}$$

Etapa 2. Calcule o volume submerso no limite.

O volume submerso corresponde às seis rodas e à parte do casco modelada por um prisma de seção trapezoidal. Usando as dimensões em metros e as aproximações fornecidas:

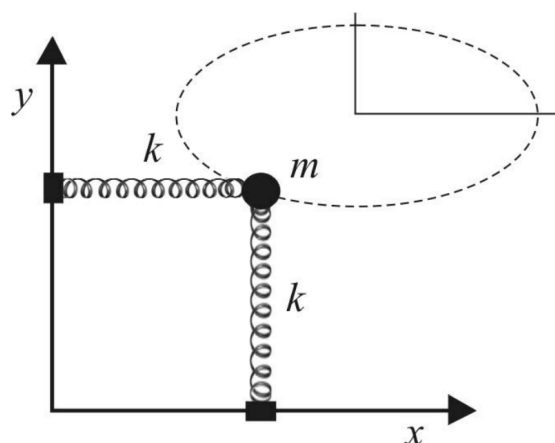
$$\begin{aligned}
 V_{\text{rodas}} &= 6\pi(0,6\text{ m})^2 \cdot 0,4\text{ m} \\
 &\approx 6 \cdot 0,45\text{ m}^3 \\
 &= 2,7\text{ m}^3 \\
 V_{\text{casco}} &= 0,8\text{ m} \cdot 6,6\text{ m} \cdot 2,7\text{ m} \\
 &\approx 14,3\text{ m}^3 \\
 V_{\text{sub}} &\approx 17\text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Etapla 3. Equilibre o peso e o empuxo.

No limite de flutuação, o peso é igual ao empuxo. Cancelando g :

$$\begin{aligned}
 m_{\text{total}} &= \rho V_{\text{sub}} \\
 &\approx 1000\text{ kg/m}^3 \cdot 17\text{ m}^3 \\
 &= 17\,000\text{ kg} \\
 16100 + 5x &\approx 17000 \\
 x &\approx \boxed{180}
 \end{aligned}$$

Questão 23



Dois cursores se movem sem atrito pelos eixos cartesianos, mantendo as molas indicadas na figura paralelas a eles. Presa em uma das extremidades de cada mola, uma partícula de massa m percorre portanto uma trajetória elíptica. Seja E_x a energia potencial elástica da mola com cursor deslizante sobre o eixo x .

Dados:

- equação da trajetória: $4x^2 - 32x + 9y^2 - 54y + 109 = 0$ (todas as distâncias em metros);
- constante elástica de cada mola: k .

O valor máximo de E_x é:

A () $2k$

B () $4k$

C () $9/2 k$

D () $9k$

E () $3/2 k$

Gabarito: A

A equação reduzida da elipse fornece a amplitude da deformação da mola vertical. A energia elástica máxima depende do quadrado dessa amplitude.

Etapla 1. Coloque a elipse na forma reduzida.

Agrupando os termos e completando quadrados:



$$\begin{aligned}4(x^2 - 8x) + 9(y^2 - 6y) &= -109 \\4(x - 4)^2 + 9(y - 3)^2 &= -109 + 64 + 81 \\&= 36\end{aligned}$$

Dividindo por 36, obtém-se:

$$\frac{(x - 4)^2}{3^2} + \frac{(y - 3)^2}{2^2} = 1$$

Etapla 2. Determine a deformação máxima.

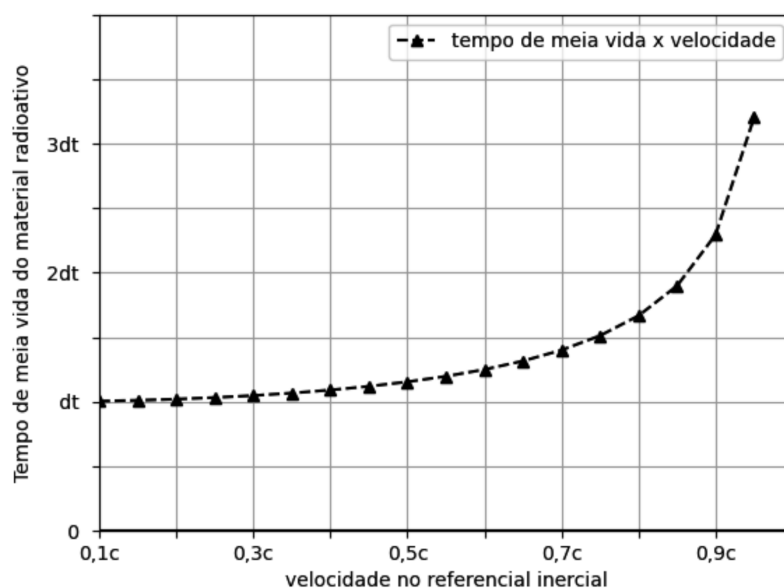
A mola presa ao cursor do eixo x é vertical. Sua deformação é o desvio de y em relação à posição de equilíbrio $y = 3$. A elipse mostra que a amplitude desse desvio é 2 m.

Etapla 3. Calcule a energia potencial elástica máxima.

Com k expresso no SI, a energia em joules é:

$$\begin{aligned}E_{x,\max} &= \frac{k(\Delta y_{\max})^2}{2} \\&= \frac{k \cdot 2^2}{2} \\&= \boxed{2k}\end{aligned}$$

Questão 24



Um material radioativo é colocado num compartimento que viaja a uma velocidade muito alta. Assim, seu tempo de meia vida aumenta em relação ao referencial inercial, embora não seja afetado no referencial do compartimento, como mostra o gráfico acima. Um experimento é realizado com duas amostras iguais A e B desse material, sendo A colocada dentro do compartimento e B estando no referencial inercial.

Dados:

- velocidade da luz no vácuo: c ;
- tempo de meia vida do material radioativo no referencial inercial: dt .

A velocidade aproximada, estimada pelo gráfico, necessária para a viagem do compartimento de forma que a quantidade percentual da amostra A remanescente da desintegração exponencial seja o dobro se comparada com o percentual remanescente da desintegração da amostra B, após 5 vezes o tempo de meia vida em referencial inercial, é:

A () $0,50c$ B () $0,70c$ C () $0,90c$ D () $0,95c$ E () $0,60c$

Gabarito: E

A lei de decaimento determina a meia-vida necessária para a amostra em movimento. A velocidade correspondente é estimada pelo gráfico.

Etapa 1. Escreva as massas após cinco meias-vidas de B.

Se m_0 é a massa inicial de cada amostra, em $t = 5dt$ a massa de B é:

$$\begin{aligned} m_B &= \frac{m_0}{2^{5dt/dt}} \\ &= \frac{m_0}{2^5} \end{aligned}$$

Seja dt' a meia-vida de A medida no mesmo referencial. No mesmo instante:

$$m_A = \frac{m_0}{2^{5dt/dt'}}$$

Etapa 2. Determine a meia-vida de A.

Como as amostras têm a mesma massa inicial, dobrar o percentual remanescente equivale a impor $m_A = 2m_B$:

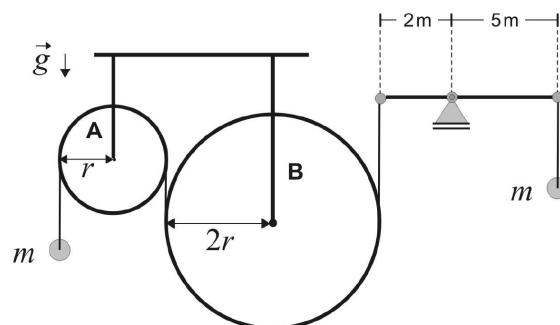
$$\begin{aligned}\frac{m_0}{2^{5dt/dt'}} &= 2 \cdot \frac{m_0}{2^5} \\ 2^{5dt/dt'} &= 2^4 \\ \frac{5dt}{dt'} &= 4 \\ dt' &= \frac{5}{4} dt\end{aligned}$$

Etapa 3. Leia a velocidade no gráfico.

A meia-vida deve valer 1,25 vez a de B. Pelo gráfico, esse valor corresponde aproximadamente a:

$$v = 0,60c$$

Questão 25



A figura mostra duas roldanas presas ao teto por hastes verticais, duas partículas de massa m e uma barra horizontal funcionando como uma “gangorra”. O sistema está inicialmente em repouso.

Dado:

- aceleração da gravidade: g .

Observações:

- as hastes, roldanas e barra possuem massas desprezíveis;
- o fio que passa pelas roldanas é ideal e inextensível;
- os segmentos de fio desenhados na figura estão na vertical.

De acordo com os dados listados, geometria apresentada e pelo princípio da conservação da energia, o sistema, ao ser liberado, provoca uma aceleração inicial instantânea para baixo na partícula da direita de aproximadamente:

A () $30/29 g$

B () $5/7 g$

C () $15/29 g$

D () $5/21 g$

E () $1/5 g$

Gabarito: C

A geometria da barra relaciona os deslocamentos e as velocidades das partículas. A conservação da energia permite obter a aceleração inicial.

Etapa 1. Relacione os movimentos das partículas.

Para um pequeno deslocamento inicial x da partícula direita para baixo, a partícula esquerda sobe y . A razão dos braços da barra fornece:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$$

$$y = \frac{2}{5}x$$

A mesma razão vale para as velocidades iniciais. Se v é a velocidade da partícula direita, então $v_E = 2v/5$.

Etapla 2. Aplique a conservação da energia.

As variações das energias potencial e cinética são:

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= -mgx + mgy \\ &= -mgx + mg\frac{2}{5}x \\ &= -\frac{3}{5}mgx \\ \Delta E_c &= \frac{mv^2}{2} + \frac{mv_E^2}{2} \\ &= \frac{mv^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{2v}{5}\right)^2 \\ &= \frac{29}{50}mv^2\end{aligned}$$

Como a variação total da energia mecânica é nula:

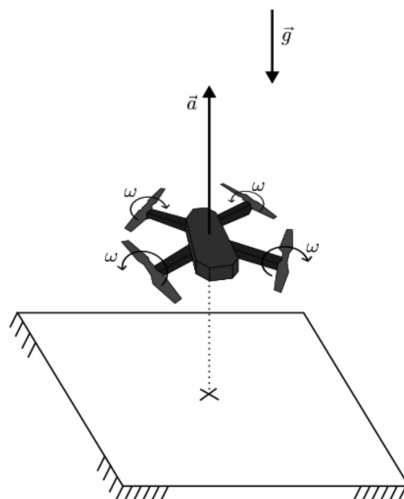
$$\begin{aligned}\frac{29}{50}mv^2 &= \frac{3}{5}mgx \\ v^2 &= \frac{30}{29}gx\end{aligned}$$

Etapla 3. Identifique a aceleração inicial.

No limite do deslocamento inicial a partir do repouso, a relação de Torricelli é $v^2 = 2ax$. Comparando os coeficientes de x :

$$\begin{aligned}2a &= \frac{30}{29}g \\ a &= \boxed{\frac{15}{29}g}\end{aligned}$$

Questão 26



Um drone quadricóptero de massa m é controlado por seu operador, de forma a executar uma trajetória vertical com aceleração constante para cima. De repente, seus quatro motores falham ao mesmo tempo e param bruscamente. Por conta de sua velocidade vertical já adquirida, o quadricóptero ainda continua sua trajetória para cima após a falha, atingindo ao final uma altura máxima h após Δt desde a partida do chão. Sabe-se que a força vertical F gerada por cada motor do drone é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade angular ω do mesmo propulsor.

Dados:

- massa do drone: $m = 190 \text{ g}$;
- altura máxima atingida pelo drone, incluindo aceleração e desaceleração: $h = 9 \text{ m}$;
- tempo de voo total do drone desde a saída do chão até atingir a altura máxima: $\Delta t = 6 \text{ s}$;
- força vertical gerada por cada motor do drone: $F = C_T \omega^2$;
- constante de proporcionalidade: $C_T = 5 \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{rad}^2$;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Observação:

- considere que os propulsores atinjam suas velocidades angulares instantaneamente assim que comandados.

A velocidade angular dos propulsores imediatamente antes da falha, em rad/s , é

A () 4×10^3

B () 1×10^6

C () 1×10^3

D () 2×10^3

E () 2×10^6

Gabarito: C

As duas etapas da subida determinam a aceleração antes da falha. A segunda lei de Newton fornece a força de cada motor e, com ela, a velocidade angular dos propulsores.

Etapa 1. Relacione as distâncias das duas etapas.

Sejam a a aceleração inicial, x a altura na falha e v a velocidade nesse instante. Aplicando Torricelli antes e depois da falha:

$$v^2 = 2ax$$

$$v^2 = 2g(h - x)$$

$$2ax = 2g(h - x)$$

$$x = \frac{gh}{a + g}$$

Etapa 2. Use o tempo total para determinar a .

Os tempos das duas etapas são v/a e v/g . Assim:

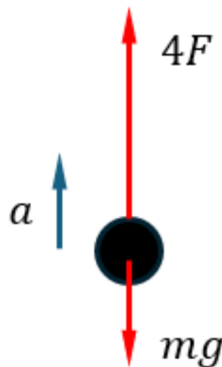
$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{v}{a} + \frac{v}{g} \\ &= \frac{v(a+g)}{ag} \\ (\Delta t)^2 &= \frac{2ax(a+g)^2}{a^2g^2} \\ &= \frac{2h(a+g)}{ag}\end{aligned}$$

Substituindo os valores numéricos no SI, com a em m/s^2 :

$$\begin{aligned}36 &= \frac{18(a+10)}{10a} \\ 20a &= a+10 \\ a &= \frac{10}{19} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule a força de cada motor.

Antes da falha, os quatro motores exercem força para cima, e o peso atua para baixo.



Pela segunda lei de Newton, com $m = 0,19 \text{ kg}$:

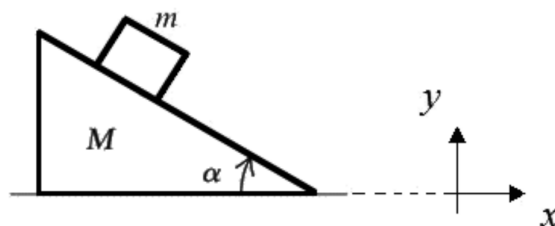
$$\begin{aligned}4F &= m(a+g) \\ &= 0,19 \text{ kg} \left(\frac{10}{19} + 10 \right) \text{ m/s}^2 \\ &= 2 \text{ N} \\ F &= 0,5 \text{ N}\end{aligned}$$

Etapa 4. Determine a velocidade angular.

Da relação $F = C_T \omega^2$:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{F}{C_T} \\ &= \frac{0,5 \text{ N}}{5 \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{rad}^2} \\ &= 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \\ \omega &= \boxed{1 \times 10^3 \text{ rad/s}}\end{aligned}$$

Questão 27



A figura ilustra uma cunha de massa M , cujo ângulo de inclinação em relação à horizontal é α , que repousa sobre a superfície do solo. Um bloco de massa m é colocado sobre a cunha a uma altura arbitrária acima do solo. O sistema é liberado a partir do repouso.

Dado:

- aceleração da gravidade: g .

Observação:

- despreze os atritos entre o bloco e a cunha e entre a cunha e o solo.

A tangente do ângulo entre o vetor velocidade do bloco e o eixo x é:

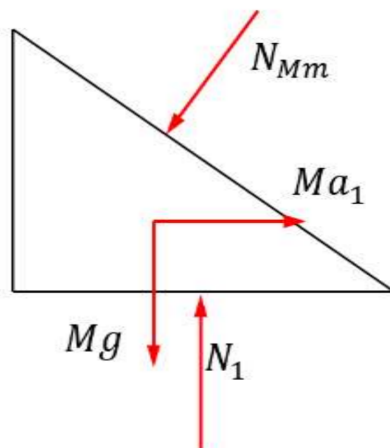
A () $\left(\frac{M}{m+M}\right) \tan \alpha$
 B () $\left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan \alpha$
 C () $\tan \alpha$
 D () $\sqrt{1 + \frac{m}{M}} \tan \alpha$
 E () $\left(1 + \sqrt{\frac{m}{M}}\right) \tan \alpha$

Gabarito: B

O princípio de D'Alembert permite calcular as acelerações no referencial da cunha. Depois, a composição das acelerações fornece a direção do movimento no referencial do solo.

Etapa 1. Escreva as equações da cunha e do bloco.

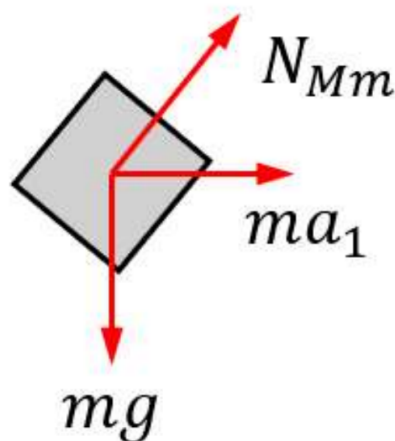
Seja a_1 o módulo da aceleração da cunha para a esquerda e N a normal entre os corpos. No referencial da cunha, a força de inércia sobre ela aponta para a direita.



O equilíbrio horizontal nesse referencial fornece:

$$Ma_1 = N \sin \alpha$$

Para o bloco, seja a_2 a aceleração relativa ao longo da rampa, para baixo. A força de inércia ma_1 aponta para a direita.



As projeções perpendicular e paralela à rampa dão:

$$\begin{aligned} N + ma_1 \sin \alpha &= mg \cos \alpha \\ ma_2 &= ma_1 \cos \alpha + mg \sin \alpha \end{aligned}$$

Etapas 2. Determine as acelerações.

Eliminando N nas equações da cunha e da direção perpendicular:

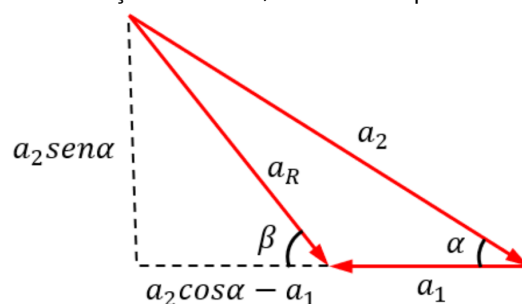
$$\begin{aligned} \frac{Ma_1}{\sin \alpha} + ma_1 \sin \alpha &= mg \cos \alpha \\ a_1(M + m \sin^2 \alpha) &= mg \sin \alpha \cos \alpha \\ a_1 &= \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Para abreviar a substituição, denote $D = M + m \sin^2 \alpha$. A equação paralela à rampa fornece:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cos \alpha + g \sin \alpha \\ &= \frac{mg \sin \alpha \cos^2 \alpha}{D} + g \sin \alpha \\ &= \frac{g \sin \alpha}{D} (m \cos^2 \alpha + D) \\ &= \frac{(M + m)g \sin \alpha}{D} \end{aligned}$$

Etapas 3. Componha a aceleração no referencial do solo.

A aceleração relativa do bloco se soma à aceleração da cunha, como no esquema.



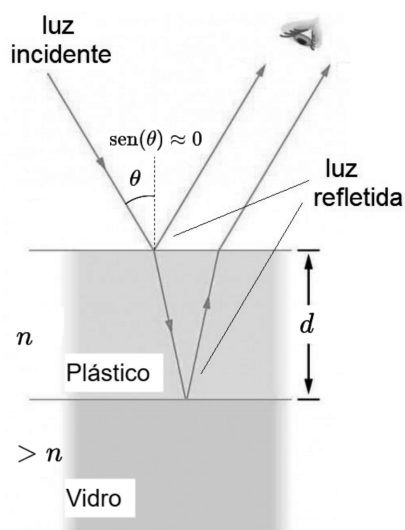
As componentes da aceleração do bloco no solo são:

$$\begin{aligned} a_x &= a_2 \cos \alpha - a_1 \\ &= \frac{Mg \sin \alpha \cos \alpha}{D} \\ |a_y| &= a_2 \sin \alpha \\ &= \frac{(M + m)g \sin^2 \alpha}{D} \end{aligned}$$

Como o sistema parte do repouso e as acelerações são constantes enquanto o bloco está na rampa, velocidade e aceleração têm a mesma direção. Para o ângulo β entre a velocidade e o eixo x :

$$\begin{aligned}
 \tan \beta &= \frac{|a_y|}{a_x} \\
 &= \frac{M + m \frac{\sin a}{\cos a}}{M} \\
 &= \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan a
 \end{aligned}$$

Questão 28



Uma placa de vidro é revestida com uma camada de plástico transparente de índice de refração n para que o reflexo no vidro de uma onda incidente quase ortogonalmente de comprimento de onda λ no ar seja eliminado por interferência.

Dados:

- índice de refração da camada de plástico: $n = 1,2$;
- máxima espessura permitida para a camada de plástico: $D = 1 \text{ } \mu\text{m}$;
- comprimento de onda no ar da onda incidente: $\lambda = 500 \text{ nm}$.

Se a espessura d da camada de plástico não pode ser maior que D , o número de valores possíveis para d que eliminem o reflexo é:

A () 1

B () 2

C () 3

D () 4

E () 5

Gabarito: E

A diferença de caminho óptico entre os raios refletidos determina as espessuras de interferência destrutiva. Depois, basta contar as que respeitam o limite dado.

Etapas 1. Determine a diferença de caminho óptico.

O raio que atravessa o plástico percorre a camada na ida e na volta. Para incidência quase normal:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= 2nd \\
 &= 2,4d
 \end{aligned}$$

A figura indica que o índice do vidro é maior que o do plástico. Assim, ambas as reflexões ocorrem na passagem para um meio de maior índice e sofrem a mesma inversão de fase.

**Etapla 2.** Imponha a interferência destrutiva.

Como as inversões de fase são iguais, a diferença de caminho deve ser um múltiplo ímpar de $\lambda/2$. Seja j um inteiro positivo ímpar:

$$\begin{aligned}2nd &= \frac{j\lambda}{2} \\d &= \frac{j\lambda}{4n} \\&= \frac{j \cdot 500 \text{ nm}}{4 \cdot 1,2} \\&= \frac{2,5}{24}j \text{ m}\end{aligned}$$

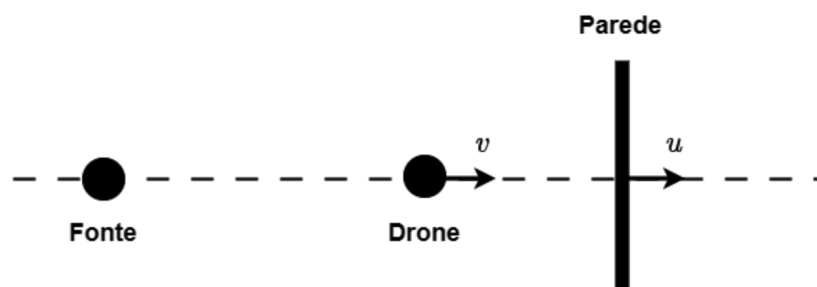
Etapla 3. Conte as espessuras permitidas.

As espessuras crescem com j . Testando os ímpares sucessivos:

j	$d/\mu\text{m}$	Respeita $d \leq D$?
1	2,5/24	Sim
3	7,5/24	Sim
5	12,5/24	Sim
7	17,5/24	Sim
9	22,5/24	Sim
11	27,5/24	Não

Portanto, há espessuras que produzem interferência destrutiva dentro do limite.

Questão 29



Considere uma fonte sonora estacionária emitindo ondas de frequência $f_o = 1000$ Hz, a 20 m de uma parede plana que se move afastando-se da fonte à velocidade constante $u = 34$ m/s. Inicialmente, há um drone posicionado entre a fonte e a parede, a 15 m da fonte, que também se afasta da fonte à velocidade $v = 17$ m/s.

Dado:

- velocidade do som no ar: 340 m/s.

Observação:

- as ondas sonoras são completamente refletidas pela superfície da parede, não havendo absorção.

A frequência de batimento percebida pelos sensores do drone devido à superposição entre os sons percebidos (direto da fonte e refletido na parede) é de, aproximadamente:

- A () 132 Hz B () 66 Hz C () 81 Hz D () 91 Hz E () 101 Hz

Gabarito: D

O efeito Doppler deve ser aplicado ao som direto e, em duas etapas, ao som refletido. A frequência de batimento é a diferença entre as frequências recebidas pelo drone.

Etapas 1. Calcule a frequência do som direto.

Seja $c = 340$ m/s a velocidade do som. Como o drone se afasta da fonte estacionária:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_o \frac{c - v}{c} \\ &= 1000 \text{ Hz} \cdot \frac{340 - 17}{340} \\ &= 950 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Etapas 2. Calcule a frequência recebida pela parede.

A parede também se afasta da fonte, com velocidade u :

$$\begin{aligned} f_p &= f_o \frac{c - u}{c} \\ &= 1000 \text{ Hz} \cdot \frac{340 - 34}{340} \\ &= 900 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Etapas 3. Calcule a frequência do som refletido no drone.

A parede atua como uma fonte móvel da onda refletida. Ela se afasta do drone, enquanto o drone se move contra o sentido dessa onda:

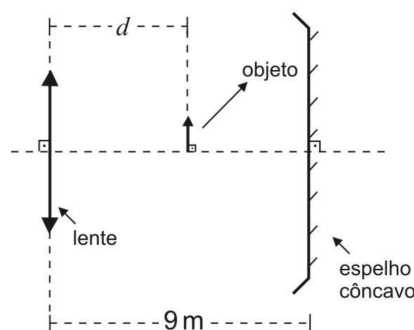
$$\begin{aligned}
 f_2 &= f_p \frac{c+v}{c+u} \\
 &= 900 \text{ Hz} \cdot \frac{340+17}{340+34} \\
 &= 900 \text{ Hz} \cdot \frac{21}{22} \\
 &\approx 859 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

Etapla 4. Determine a frequência de batimento.

A diferença entre as frequências percebidas é:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{bat}} &= |f_1 - f_2| \\
 &\approx 950 \text{ Hz} - 859 \text{ Hz} \\
 &= \boxed{91 \text{ Hz}}
 \end{aligned}$$

Questão 30



Um objeto é colocado entre uma lente convergente e um espelho côncavo, conforme mostra a geometria da figura. A imagem do objeto no espelho e o próprio objeto geram duas imagens A e B na lente.

Dados:

- distância focal da lente: 3 m;
- distância focal do espelho: 6 m;
- distância entre a lente e o espelho: 9 m.

A distância em metros entre A e B , quando $d = 6$ m, é:

A () 1,50

B () 3,75

C () 3,50

D () 0

E () 2,25

Gabarito: E

A imagem do espelho funciona como um segundo objeto para a lente. A equação de Gauss determina as posições das imagens.

Etapla 1. Localize a imagem formada pelo espelho.

O objeto está a 6 m da lente, portanto a 3 m do espelho. Com $f_e = 6$ m:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p'_e} &= \frac{1}{6 \text{ m}} - \frac{1}{3 \text{ m}} \\
 p'_e &= -6 \text{ m}
 \end{aligned}$$

A imagem é virtual e fica 6 m atrás do espelho. Sua distância à lente é, portanto, 15 m.



Etapla 2. Calcule as imagens da lente e sua separação.

Para a lente, $f_l = 3 \text{ m}$. O objeto original está a $p_1 = 6 \text{ m}$, e a imagem do espelho atua como objeto a $p_2 = 15 \text{ m}$. Aplicando a equação de Gauss aos dois casos:

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{3 \text{ m}} - \frac{1}{6 \text{ m}}$$

$$p'_1 = 6 \text{ m}$$

$$\frac{1}{p'_2} = \frac{1}{3 \text{ m}} - \frac{1}{15 \text{ m}}$$

$$p'_2 = 3,75 \text{ m}$$

As imagens ficam do mesmo lado da lente. Subtraindo suas distâncias à lente, obtém-se $AB = \boxed{2,25 \text{ m}}$.

**GABARITO QUÍMICA****Questão 31**

Qual é, aproximadamente, o número de moléculas em 22,4 litros de água, em 1 atm e 4 °C?

- A () $3,01 \times 10^{23}$ B () $6,02 \times 10^{23}$ C () $7,46 \times 10^{26}$ D () $1,20 \times 10^{27}$ E () $2,99 \times 10^{25}$

Gabarito: C

A água está líquida nas condições indicadas. Sua densidade fornece a massa, que é convertida em quantidade de matéria e, depois, em número de moléculas.

Etapla 1. Converta o volume em massa.

A 4 °C, a densidade da água é aproximadamente 1,00 g/mL. Para 22,4 L = 22 400 mL:

$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ &\approx 1,00 \text{ g/mL} \cdot 22\,400 \text{ mL} \\ &= 22\,400 \text{ g} \end{aligned}$$

Etapla 2. Calcule a quantidade de matéria.

Usando a massa molar da água igual a 18 g/mol:

$$\begin{aligned} n &= \frac{m}{M} \\ &= \frac{22\,400 \text{ g}}{18 \text{ g/mol}} \\ &\approx 1244,4 \text{ mol} \end{aligned}$$

Etapla 3. Determine o número de moléculas.

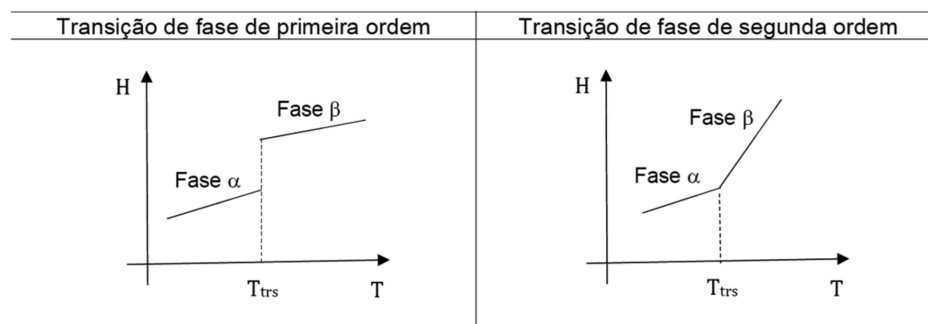
Com a constante de Avogadro aproximada por $6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$:

$$\begin{aligned} N &= nN_A \\ &\approx 1244,4 \text{ mol} \cdot 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ &\approx \boxed{7,49 \times 10^{26}} \end{aligned}$$

A alternativa C, $7,46 \times 10^{26}$, é a aproximação mais próxima entre as apresentadas. O valor nela impresso não é o arredondamento da multiplicação acima.

Questão 32

As transições de fase são acompanhadas por variações nas propriedades termodinâmicas. Dependendo do comportamento da entalpia (H) com a temperatura (T), é possível classificar as transições de fase como de primeira e de segunda ordem, conforme as representações abaixo.



Na transição entre as fases α e β , considere que:

- i. T_{trs} é a temperatura de transição;
- ii. ΔH é a variação de entalpia;
- iii. ΔS é a variação de entropia;
- iv. ΔG é a variação da energia de Gibbs.

Com base nas informações apresentadas e nas relações termodinâmicas, assinale a alternativa correta.

- A () As transições de fase de primeira e de segunda ordem apresentam $\Delta H \neq 0$.
- B () Na transição de fase de primeira ordem $\Delta G \neq 0$.
- C () Na transição de fase de primeira ordem $\Delta S = 0$.
- D () Na transição de fase de segunda ordem $\Delta S \neq 0$.
- E () Na transição de fase de segunda ordem $\Delta G = \Delta H = \Delta S = 0$.

Gabarito: E

O salto de entalpia distingue as duas ordens de transição. A condição de equilíbrio, $\Delta G = 0$, permite relacionar as variações de entalpia e entropia.

Etapa 1. Transição de primeira ordem: entalpia descontínua.

O primeiro gráfico apresenta um salto em H . Há calor latente e $\Delta H \neq 0$. Na temperatura de transição, as fases estão em equilíbrio:

$$\begin{aligned}\Delta G &= \Delta H - T_{trs} \Delta S \\ 0 &= \Delta H - T_{trs} \Delta S \\ \Delta S &= \frac{\Delta H}{T_{trs}}\end{aligned}$$

Como $\Delta H \neq 0$, também $\Delta S \neq 0$.

Etapa 2. Transição de segunda ordem: entalpia contínua.

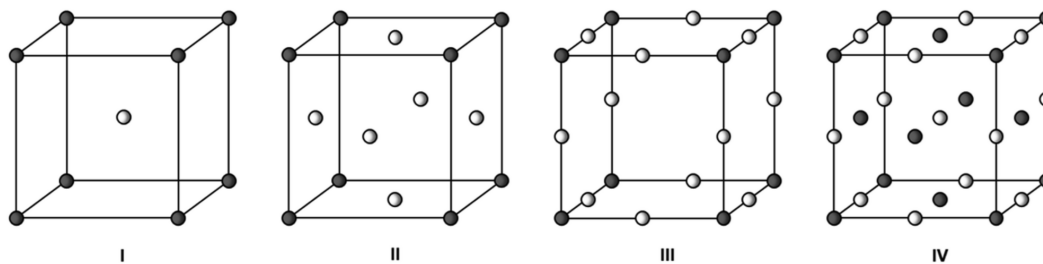
No segundo gráfico, H é contínua, embora sua inclinação mude. Não há calor latente, portanto $\Delta H = 0$. Como $\Delta G = 0$ no equilíbrio e $T_{trs} > 0$, a relação anterior exige $\Delta S = 0$.

Assim, na transição de segunda ordem, $\Delta G = \Delta H = \Delta S = 0$.



Questão 33

Considere as estruturas de células unitárias representadas a seguir:



Com base nos raios iônicos r , indique quais das células unitárias podem corresponder, respectivamente, às estruturas do cloreto de cério e do cloreto de sódio.

A () I e III.

B () I e IV.

C () II e III.

D () II e IV.

E () III e IV.

Gabarito: B

Os esquemas devem ser comparados às coordenações e às posições dos íons nas estruturas do cloreto de cério e do cloreto de sódio.

Etapa 1. Cloreto de cério: célula I.

O CsCl apresenta coordenação 8:8. Um íon no centro do cubo é cercado por oito íons do outro tipo nos vértices. O esquema I representa esse arranjo, com duas sub-redes cúbicas simples interpenetrantes.

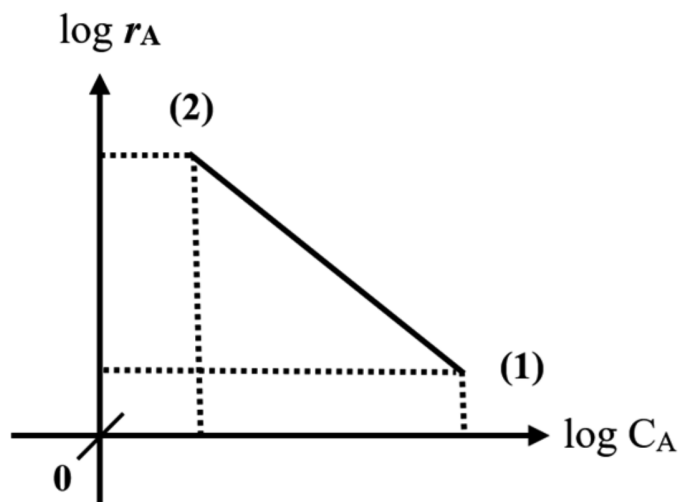
Etapa 2. Cloreto de sódio: célula IV.

O NaCl apresenta coordenação 6:6. Uma espécie ocupa os vértices e os centros das faces; a outra ocupa os sítios octaédricos, localizados no centro do cubo e nos centros das doze arestas. Esse arranjo corresponde ao esquema IV.

Portanto, as células pedidas são, respectivamente, **I e IV**.

Questão 34

O gráfico abaixo foi construído a partir da medida da velocidade de reação (r_A) e da concentração (C_A) de uma substância **A** em dois momentos sucessivos, inicial (1) e final (2):



Analisando o gráfico, pode-se afirmar que:

- A () essa reação é de ordem zero em relação à substância **A**.
- B () a substância **A** é um produto.
- C () essa reação é de ordem negativa em relação à substância **A**.
- D () a constante de velocidade dessa reação é negativa.
- E () essa reação é de ordem fracionária positiva em relação à substância **A**.

Gabarito: C

O logaritmo da lei de velocidade transforma a ordem da reação no coeficiente angular do gráfico.

Etapla 1. Relacione a inclinação à ordem da reação.

Para uma lei de velocidade $r_A = kC_A^n$, com $k > 0$, a aplicação do logaritmo fornece:

$$\log r_A = \log k + n \log C_A$$

Assim, no gráfico de $\log r_A$ em função de $\log C_A$, o coeficiente angular é n .

Etapla 2. Determine o sinal da ordem.

A reta do enunciado é decrescente. Logo, seu coeficiente angular é negativo, e a reação tem ordem negativa em relação à substância **A**:

$$n < 0$$

**Questão 35**

Sabe-se que uma substância contém, em sua molécula, carbono e hidrogênio e, suspeita-se que também contenha oxigênio, descartando-se completamente a possibilidade da presença de outros átomos na sua estrutura. Nas CNTP, essa substância se encontra em estado gasoso com massa específica igual a 2,05 g/L. Quando 46 g da substância são queimados com oxigênio em excesso, resultam 88 g de dióxido de carbono e 54 g de água.

Pode-se afirmar que a substância é:

- A () Etanol.
- B () Etano.
- C () Acetileno.
- D () Dimetil éter.
- E () Só pode ser determinada se for informado o valor do excesso de oxigênio empregado.

Gabarito: D

Os produtos da combustão fornecem as quantidades de carbono e hidrogênio. O balanço de massa determina o oxigênio, e a massa específica confirma a fórmula molecular.

Etapa 1. Determine as quantidades de carbono e hidrogênio.

Cada mol de CO_2 contém um mol de átomos de carbono:

$$\begin{aligned}n_c &= \frac{88 \text{ g}}{44 \text{ g/mol}} \\&= 2 \text{ mol} \\m_c &= 2 \text{ mol} \cdot 12 \text{ g/mol} \\&= 24 \text{ g}\end{aligned}$$

Cada mol de água contém dois mols de átomos de hidrogênio:

$$\begin{aligned}n_H &= 2 \cdot \frac{54 \text{ g}}{18 \text{ g/mol}} \\&= 6 \text{ mol} \\m_H &= 6 \text{ mol} \cdot 1 \text{ g/mol} \\&= 6 \text{ g}\end{aligned}$$

Etapa 2. Determine o oxigênio e a fórmula empírica.

A massa da amostra que não corresponde a carbono ou hidrogênio deve ser de oxigênio:

$$\begin{aligned}m_o &= 46 \text{ g} - 24 \text{ g} - 6 \text{ g} \\&= 16 \text{ g} \\n_o &= \frac{16 \text{ g}}{16 \text{ g/mol}} \\&= 1 \text{ mol}\end{aligned}$$

A proporção entre as quantidades de C, H e O é 2 : 6 : 1. Portanto, a fórmula empírica é $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$.

Etapa 3. Confirme a fórmula molecular e identifique a substância.

Usando o volume molar de aproximadamente 22,4 L/mol nas CNTP:

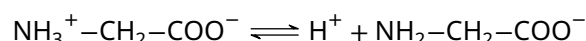
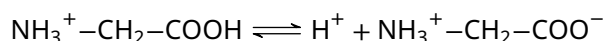
$$\begin{aligned}M &= \rho V_m \\&\approx 2,05 \text{ g/L} \cdot 22,4 \text{ L/mol} \\&\approx 46 \text{ g/mol}\end{aligned}$$

Esse valor coincide com a massa molar da fórmula empírica. A fórmula molecular também é $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$.

Entre as alternativas, etanol e dimetil éter possuem essa fórmula. Nas CNTP, o etanol é líquido, enquanto o dimetil éter é gasoso. Logo, a substância é **dimetil éter**.

Questão 36

O aminoácido glicina ($\text{NH}_2\text{--CH}_2\text{--COOH}$), em solução aquosa, pode receber e/ou liberar prótons e se converter em $\text{NH}_3^+\text{--CH}_2\text{--COOH}$, $\text{NH}_3^+\text{--CH}_2\text{--COO}^-$ e $\text{NH}_2\text{--CH}_2\text{--COO}^-$. Essas espécies químicas podem participar das reações indicadas a seguir que possuem, respectivamente, pK_1 e pK_2 :



Considerando as informações apresentadas, qual o pH do ponto isoelétrico da glicina?

- A () 7 B () $pK_1 \cdot pK_2$ C () $(pK_1 \cdot pK_2)^{\frac{1}{2}}$ D () $2(pK_1 + pK_2)$ E () $\frac{1}{2}(pK_1 + pK_2)$

Gabarito: E

No ponto isoelétrico, as concentrações das formas com cargas positiva e negativa são iguais. As duas constantes de dissociação permitem obter a concentração de íons hidrogênio nessa condição.

Etapla 1. Escreva as constantes dos equilíbrios.

Denote a forma catiônica por Cat, o zwitterion por Zw e a forma aniônica por An. Para os equilíbrios apresentados:

$$K_1 = \frac{[\text{H}^+][\text{Zw}]}{[\text{Cat}]}$$

$$K_2 = \frac{[\text{H}^+][\text{An}]}{[\text{Zw}]}$$

Etapla 2. Imponha a igualdade das formas carregadas.

Isolando as concentrações de Cat e An e usando $[\text{Cat}] = [\text{An}]$:

$$\frac{[\text{H}^+][\text{Zw}]}{K_1} = \frac{K_2[\text{Zw}]}{[\text{H}^+]}$$

$$[\text{H}^+]^2 = K_1 K_2$$

$$[\text{H}^+] = \sqrt{K_1 K_2}$$

Etapla 3. Converta a concentração em pH.

Aplicando o logaritmo decimal e usando $pK_i = -\log K_i$:

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log[\text{H}^+] \\ &= -\frac{1}{2} \log(K_1 K_2) \\ &= -\frac{1}{2} (\log K_1 + \log K_2) \\ &= \frac{1}{2} (pK_1 + pK_2) \end{aligned}$$

Questão 37

A hidrazina (N_2H_4) é uma base diprótica fraca que pode formar vários sais anidros com ácido sulfúrico.

Assinale a única alternativa que contém três fórmulas mínimas de sais anidros que podem, em teoria, ser formados.

- A** () $N_2H_6SO_4$; $N_4H_{10}SO_4$; NH_4SO_4
B () $N_2H_6SO_4$; $N_4H_{10}SO_4$; NH_2SO_3
C () $N_2H_6SO_4$; $N_4H_8SO_3$; NH_4SO_4
D () $N_2H_4SO_3$; $N_4H_{10}SO_4$; NH_2SO_3
E () $N_2H_4SO_3$; $N_4H_8SO_3$; NH_2SO_3

Gabarito: A

As protonações da hidrazina e as desprotonações do ácido sulfúrico fornecem os íons. Suas cargas determinam as proporções de combinação nos sais.

Etapla 1. Identifique os cátions e os ânions possíveis.

A base diprótica N_2H_4 pode receber um ou dois prótons, formando $N_2H_5^+$ e $N_2H_6^{2+}$. O ácido sulfúrico fornece HSO_4^- e SO_4^{2-} .

Etapla 2. Combine os íons com neutralidade de carga.

Um cátion $N_2H_5^+$ e um ânion HSO_4^- fornecem o sal de fórmula mínima $N_2H_6SO_4$.

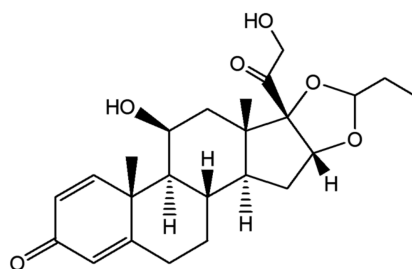
Dois cátions $N_2H_5^+$ neutralizam um ânion SO_4^{2-} , fornecendo $N_4H_{10}SO_4$.

Um cátion $N_2H_6^{2+}$ exige dois ânions HSO_4^- . A composição é $N_2H_8S_2O_8$; dividindo todos os índices por 2, a fórmula mínima é NH_4SO_4 .

As três fórmulas correspondem à alternativa A.

Questão 38

A budesonida é um esteroide glicocorticoide, usado no tratamento de rinite não infecciosa. Sua estrutura molecular está mostrada a seguir:



Considerando essa estrutura, são feitas as seguintes afirmações:

- I.** A fórmula molecular da budesonida é $C_{24}H_{32}O_6$.
II. A molécula possui 8 carbonos quirais.
III. Cetona, ácido e éter são funções orgânicas encontradas na molécula.
IV. Acusa resultado negativo quando submetida ao teste com Reagente de Tollens.

Com base na análise das afirmações acima, assinale a opção correta:

- A** () Nenhuma afirmação é verdadeira.
B () Apenas uma afirmação é verdadeira.
C () Apenas duas afirmações são verdadeiras
D () Apenas três afirmações são verdadeiras.
E () Todas as afirmações são verdadeiras.

Gabarito: A

A estrutura permite conferir a fórmula molecular, os centros quirais e as funções orgânicas. O teste de Tollens exige atenção ao grupo alfa-hidroxiketona presente na cadeia lateral.

Etapa 1. Afirmação I: Incorreta.

A contagem dos átomos fornece a fórmula $C_{25}H_{34}O_6$, diferente de $C_{24}H_{32}O_6$.

Etapa 2. Afirmação II: Incorreta.

A estrutura apresenta nove carbonos quirais, cada um ligado a quatro grupos distintos. A contagem inclui o carbono do acetal ligado aos dois oxigênios do anel lateral, pois os dois caminhos através desses oxigênios são diferentes.

Etapa 3. Afirmação III: Incorreta.

As funções presentes são álcool, cetona e éter. Não há grupo carboxila e, portanto, não há função ácido carboxílico.

Etapa 4. Afirmação IV: Incorreta.

A cadeia lateral contém o grupo $-\text{CO}-\text{CH}_2\text{OH}$, uma alfa-hidroxiketona terminal. Esse grupo pode reduzir o reagente de Tollens; logo, a ausência de aldeído na estrutura desenhada não permite concluir que o teste seja negativo. Pela análise desse grupo funcional, nenhuma afirmação é verdadeira:

Nenhuma afirmação é verdadeira.

Essa conclusão corresponde à alternativa A e diverge do gabarito da Pensi, que assinala B e considera IV correta. A divergência e a referência química estão registradas no arquivo de revisão do projeto.

Questão 39

Um terço do calor padrão de reação liberado pela combustão completa de 1 mol do gás sulfeto de carbonila, na presença de ar atmosférico, é transferido para 1 kg de água, mantida no estado líquido sob pressão.

Considere:

- Composição molar do ar atmosférico: 21% O_2 / 79% N_2
- Calor específico da água líquida: $4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$
- ΔH_f° do sulfeto de carbonila: -142 kJ/mol
- ΔH_f° do dióxido de carbono: -393 kJ/mol
- ΔH_f° do dióxido de enxofre: -296 kJ/mol

A variação de temperatura experimentada pela água, em $^\circ\text{C}$, nessas condições, é de:

A () 86

B () 65

C () 110

D () 43

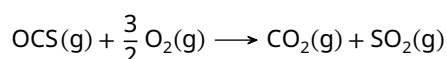
E () 130

Gabarito: D

A lei de Hess fornece o calor liberado na combustão, e a relação $Q = mc\Delta T$ converte a parcela transferida em elevação de temperatura.

Etapa 1. Escreva a reação de combustão.

A combustão completa do sulfeto de carbonila é:



Etapla 2. Calcule o calor liberado na combustão.

A entalpia de reação é a soma das entalpias de formação dos produtos menos a dos reagentes. A contribuição de $O_2(g)$ no estado padrão é zero:

$$\begin{aligned}\Delta H^\circ &= [-393 - 296 - (-142)] \text{ kJ/mol} \\ &= -547 \text{ kJ/mol}\end{aligned}$$

Etapla 3. Determine o calor transferido à água.

A água recebe um terço do calor liberado na combustão de 1 mol:

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1 \text{ mol} \cdot 547 \text{ kJ/mol}}{3} \\ &\approx 182,3 \text{ kJ}\end{aligned}$$

Etapla 4. Calcule a elevação de temperatura.

Para $m = 1 \text{ kg}$ e $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$:

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{Q}{mc} \\ &\approx \frac{182,3 \text{ kJ}}{1 \text{ kg} \cdot 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}}} \\ &\approx \boxed{43^\circ\text{C}}\end{aligned}$$

Questão 40

Durante uma pesquisa sobre metabolismo energético em organismos vivos, um bioquímico analisou diferentes tipos de lipídios presentes em amostras biológicas.

Sobre os lipídios, analise as afirmativas abaixo.

- I. Os lipídios, tais como os triacilgliceróis, os cerídeos e os esteroides, são moléculas orgânicas que não são solúveis em água e éter dimetílico, devido a sua natureza apolar.
- II. Os lipídios podem ser formados a partir da reação de ácidos graxos saturados como o ácido graxo de fórmula molecular $C_{18}H_{36}O_2$ e o glicerol.
- III. O ácido graxo de fórmula molecular $C_{14}H_{26}O_2$ apresenta ponto de fusão mais alto que o ácido graxo de fórmula molecular $C_{14}H_{28}O_2$ devido ao aumento das forças de dispersão de London.
- IV. Os triacilgliceróis são formados a partir de ésteres de ácidos carboxílicos, com cadeias carbônicas iguais ou diferentes, e glicerol. A sua hidrólise alcalina (saponificação) produz glicerol e sais de ácidos carboxílicos.

Assinale a opção que apresenta APENAS afirmativas verdadeiras:

A () I e II

B () II e IV

C () II e III

D () III e IV

E () I e IV

Gabarito: B

A análise considera a solubilidade dos lipídios, a formação de triacilgliceróis e o efeito da insaturação no empacotamento das cadeias.

Etapla 1. Afirmativa I: Incorreta.

A baixa solubilidade em água decorre das extensas regiões apolares dos lipídios. Os grupos orgânicos do éter dimetílico podem interagir com essas regiões por forças de dispersão, permitindo sua atuação como solvente para lipídios.

**Etapas 2.** Afirmitiva II: Correta.

O ácido graxo saturado $C_{18}H_{36}O_2$, ácido esteárico, pode reagir com o glicerol por esterificação. A esterificação das três hidroxilas do glicerol forma um triacilglicerol.

Etapas 3. Afirmitiva III: Incorreta na interpretação usual.

A fórmula $C_{14}H_{26}O_2$ é compatível com um ácido graxo monoinsaturado. Interpretando-o como uma cadeia aberta com dupla cis, a dobra dificulta o empacotamento e tende a reduzir o ponto de fusão em relação ao ácido saturado $C_{14}H_{28}O_2$. Essa geometria não é determinada pela fórmula molecular isolada.

Etapas 4. Afirmitiva IV: Correta com a interpretação indicada.

Os triacilgliceróis são triésteres do glicerol com ácidos graxos. Sua formação a partir de ésteres preexistentes e glicerol pode ser entendida como transesterificação. A hidrólise alcalina produz glicerol e sais de ácidos carboxílicos, os sabões.

Com essas interpretações, a combinação indicada pelo gabarito é II e IV.