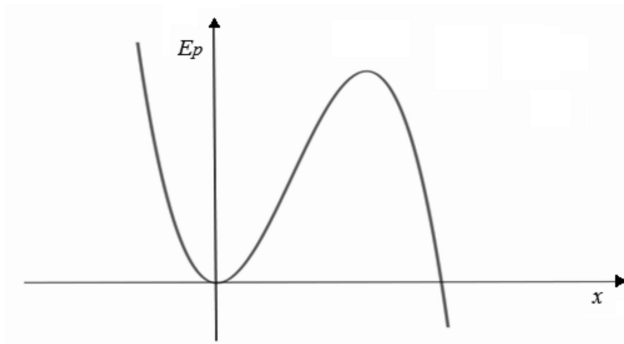


GABARITO FÍSICA

Questão 1



A figura mostra o aspecto da curva da energia potencial de uma partícula em movimento unidimensional, cuja equação é dada por

$$E_p(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \quad ,$$

sendo a força associada aplicada à partícula dada por

$$F(x) = -4x + x^2 \quad .$$

Observação:

- todos os valores são dados em unidades SI.

Dado o exposto:

- determine o intervalo de posições possíveis para a partícula para que seu movimento seja oscilatório;
- determine o supremo E_{sup} da energia mecânica abaixo do qual a partícula possa conservar-se em movimento oscilatório;
- esboce o gráfico da velocidade em função do tempo se, num instante inicial, em $x = 0$, o sentido da velocidade da partícula é da direita para a esquerda e sua energia mecânica E é tal que $E > E_{\text{sup}}$.

Gabarito

A análise do movimento oscilatório exige determinar os pontos de máximo e mínimo da função da energia potencial. A partir desses pontos, encontram-se o intervalo espacial e a energia suprema correspondente ao confinamento da partícula, o que permite esboçar o comportamento da velocidade no tempo.

Etapa 1. Determine o intervalo de oscilação e a energia suprema.

Para que se tenha um movimento oscilatório, x deve estar limitado pelo valor máximo de E_p , que ocorre na posição de equilíbrio instável. Dessa forma:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \\ -4x + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $x = 0$ ou $x = 4$ m.

Como em $x = 0$ temos uma posição de mínimo de energia, o máximo ocorre em $x = 4$ m. Assim, x não pode ser maior que 4 m. Além disso, como a energia potencial deve possuir um valor máximo, existe uma limitação em $x < 0$. Isso ocorre quando a energia potencial atinge o mesmo valor do máximo local:

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(4) \\ &= 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} \\ &= \frac{32}{3} \text{ J} \end{aligned}$$

Dessa forma, a energia suprema do item b é:

$$E_{\text{sup}} = \boxed{\frac{32}{3} \text{ J}}$$

Calculando o valor mínimo de x para o item a:

$$\begin{aligned} E_p(x) &= \frac{32}{3} \\ 2x^2 - \frac{x^3}{3} &= \frac{32}{3} \\ -x^3 + 6x^2 - 32 &= 0 \end{aligned}$$

Como se sabe que em $x = 4$ m há um máximo, temos uma raiz dupla para a equação. Assim:

$$\begin{aligned} -(x - 4)^2(x + 2) &= 0 \\ x &= -2 \text{ m} \end{aligned}$$

Portanto, o intervalo de posições é:

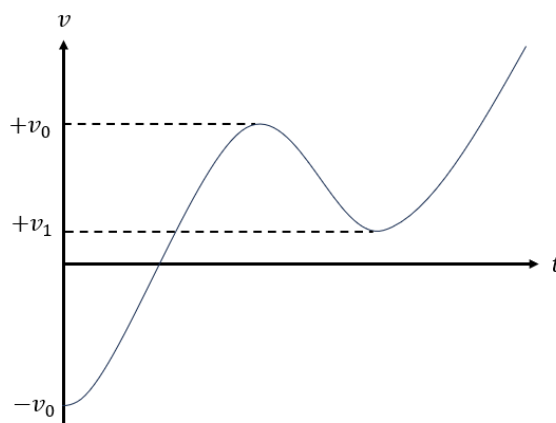
$$\boxed{-2 \text{ m} < x < 4 \text{ m}}$$

Etapa 2. Esboce o gráfico de $v(t)$.

Para esboçar o gráfico, analisa-se a trajetória descrita pela partícula:

1. A partícula se move para a esquerda freando ($a > 0$) até parar ($v = 0$).
2. A partícula retorna para a direita acelerando ($a > 0$) até passar pelo ponto $x = 0$ novamente, com mesma velocidade do início.
3. A partícula segue andando para a direita freando ($a < 0$) até passar pelo ponto onde $E_p = E_{\text{sup}}$, mas sem parar, pois sua energia mecânica é maior que E_{sup} .
4. Após esse ponto, a força se torna positiva e a partícula volta a acelerar indefinidamente ($a > 0$).

Com base nessa análise do movimento, pode-se esboçar o gráfico:



**Questão 2**

Um sistema planetário muito distante é composto por dois planetas A e B que executam ambas órbitas circulares em torno da estrela S. Um cometa C estava em rota de colisão frontal com A. Depois da colisão, foi possível observar que o choque foi perfeitamente inelástico e quando os corpos se moviam em sentido contrário, gerando assim o novo planeta, chamado CA, agora com órbita elíptica em torno de S.

Dados:

- tempo de órbita completa de A em torno de S (antes da colisão): 160 dias de A;
- 1 dia de A (antes da colisão): 4 dias terrestres;
- tempo de órbita completa de B em torno de S: 90 dias de B;
- 1 dia de B: 3 dias terrestres;
- para um corpo fixo na superfície de CA, imediatamente após o choque, a força de gravidade provocada por S é 0,081% da força de gravidade provocada por CA;
- para um corpo fixo na superfície de B, a força de gravidade provocada por S é 2,048% da força de gravidade provocada por B;
- dimensões de CA (depois da colisão) = dimensões de A (antes da colisão) = dimensões de B;
- a energia mecânica (cinética mais potencial gravitacional) de CA (após a colisão) é 7 vezes a energia mecânica de B, sendo ambas negativas.

Observações:

- despreze o efeito gravitacional da aproximação do cometa C nas trajetórias dos planetas A e B;
- despreze a interação gravitacional entre os planetas A e B;
- o potencial gravitacional no infinito é nulo;
- os raios de A e B são muito menores que os raios de suas órbitas.

Considerando o cenário descrito, determine:

- a) a razão entre os raios das órbitas de A e B;
- b) a razão entre as velocidades das órbitas de A e B;
- c) a razão entre as massas de B e CA;
- d) a razão entre a velocidade de órbita de B e a velocidade de CA imediatamente após o choque;
- e) se, imediatamente após o choque, CA estará em apoastro (ponto da órbita mais afastado de S) ou em periastro (ponto da órbita mais próximo de S), justificando a sua resposta.

Gabarito

A questão aborda a mecânica celeste e a gravitação a partir das leis de Kepler e da conservação de energia. A resolução parte dos dados dos períodos de translação e das forças gravitacionais para estabelecer as relações entre as órbitas e massas. Por fim, utiliza a energia mecânica para determinar a nova velocidade do planeta formado e classificar sua posição.

Etapla 1. Determine a razão entre os raios das órbitas de A e B.

Calculando os períodos de A e B em dias terrestres:

$$T_A = 160 \cdot 4 = 640 \text{ dias terrestres}$$

$$T_B = 90 \cdot 3 = 270 \text{ dias terrestres}$$

Pela Terceira Lei de Kepler, a razão dos quadrados dos períodos é igual à razão dos cubos dos raios das órbitas:



$$\begin{aligned}\frac{R_A^3}{T_A^2} &= \frac{R_B^3}{T_B^2} \\ \frac{R_A^3}{640^2} &= \frac{R_B^3}{270^2} \\ \frac{R_A^3}{R_B^3} &= \frac{16^2}{9^2} \\ \frac{R_A}{R_B} &= \sqrt[3]{\frac{16^2}{9^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^8}{3^4}}\end{aligned}$$

Observa-se que $16^2 = 256 = (4^3 \cdot 4) \dots$ Não, espera. $16^2/9^2 = 256/81$, extraindo raiz cúbica? Wait, o gabarito original diz: $R_A^3/R_B^3 = 16^2/9^2$. Mas $16^2/9^2$ is not a perfect cube. Wait, wait, let me look at the proof again. Ah! The periods: $T_A = 160 \times 4 = 640$ $T_B = 90 \times 3 = 270$ $T_A/T_B = 64/27$. $(T_A/T_B)^2 = (64/27)^2 = (4^3/3^3)^2 = 4^6/3^6 = (16/9)^3$. So $R_A/R_B = (T_A/T_B)^{2/3} = 16/9$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3 &= \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 \\ &= \left(\frac{640}{270}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4^3}{3^3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{16}{9}\right)^3\end{aligned}$$

Logo, a razão pedida é:

$$\frac{R_A}{R_B} = \boxed{\frac{16}{9}}$$

Etapa 2. Determine a razão entre as velocidades das órbitas de A e B.

Em uma órbita circular, a velocidade orbital é a razão entre o comprimento da órbita e o período:

$$v_A = \frac{2\pi R_A}{T_A} \quad \text{e} \quad v_B = \frac{2\pi R_B}{T_B}$$

Dividindo v_A por v_B :

$$\begin{aligned}\frac{v_A}{v_B} &= \left(\frac{R_A}{R_B}\right) \cdot \left(\frac{T_B}{T_A}\right) \\ &= \frac{16}{9} \cdot \frac{270}{640} \\ &= \frac{16}{9} \cdot \frac{27}{64} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{v_A}{v_B} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Etapa 3. Determine a razão entre as massas de B e CA.

Considerando os raios dos planetas iguais a r , pode-se comparar a força da gravidade em suas superfícies. Para um corpo de massa m na superfície de CA, o enunciado fornece que a força da estrela S é 0,081% da força do planeta CA:

$$\frac{GM_S m}{R_A^2} = \frac{0,081}{100} \cdot \frac{GM_{CA} m}{r^2}$$

Da mesma forma, na superfície de B:

$$\frac{GM_S m}{R_B^2} = \frac{2,048}{100} \cdot \frac{GM_B m}{r^2}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira para encontrar a relação entre as massas:



$$\begin{aligned}\frac{R_A^2}{R_B^2} &= \frac{2,048}{0,081} \cdot \frac{M_B}{M_{CA}} \\ \left(\frac{16}{9}\right)^2 &= \frac{2048}{81} \cdot \frac{M_B}{M_{CA}} \\ \frac{256}{81} &= \frac{2048}{81} \cdot \frac{M_B}{M_{CA}} \\ 256 &= 2048 \cdot \frac{M_B}{M_{CA}} \\ \frac{M_B}{M_{CA}} &= \frac{256}{2048}\end{aligned}$$

Simplificando a fração:

$$\frac{M_B}{M_{CA}} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Etapla 4. Determine a razão entre as velocidades de B e CA.

O enunciado estabelece uma relação entre a energia mecânica de CA logo após a colisão e a energia mecânica de B, sabendo que as duas são negativas:

$$E_{CA} = 7 \cdot E_B$$

Para o planeta B em órbita circular, sua energia mecânica total é a metade da sua energia potencial:

$$E_B = -\frac{GM_S M_B}{2R_B}$$

Para o planeta CA logo após a colisão (localizado no ponto onde A estava, à distância R_A da estrela):

$$E_{CA} = \frac{M_{CA} v_{CA}^2}{2} - \frac{GM_S M_{CA}}{R_A}$$

Igualando conforme o enunciado e usando as relações $R_B = \frac{9}{16} R_A$ e $M_B = \frac{1}{8} M_{CA}$:

$$\begin{aligned}\frac{M_{CA} v_{CA}^2}{2} - \frac{GM_S M_{CA}}{R_A} &= 7 \cdot \left(-\frac{GM_S M_B}{2R_B} \right) \\ \frac{v_{CA}^2}{2} - \frac{GM_S}{R_A} &= -\frac{7}{2} \cdot \frac{GM_S \left(\frac{1}{8} \right)}{\frac{9}{16} R_A} \\ \frac{v_{CA}^2}{2} - \frac{GM_S}{R_A} &= -\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{GM_S}{R_A} \\ \frac{v_{CA}^2}{2} - \frac{GM_S}{R_A} &= -\frac{7}{9} \cdot \frac{GM_S}{R_A} \\ \frac{v_{CA}^2}{2} &= \frac{GM_S}{R_A} - \frac{7}{9} \cdot \frac{GM_S}{R_A} \\ \frac{v_{CA}^2}{2} &= \frac{2}{9} \cdot \frac{GM_S}{R_A} \\ v_{CA} &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{GM_S}{R_A}}\end{aligned}$$

A velocidade da órbita circular do planeta B é decorrente do equilíbrio entre a força gravitacional e a força centrípeta:

$$v_B = \sqrt{\frac{GM_S}{R_B}}$$

Dividindo v_B por v_{CA} :



$$\begin{aligned}\frac{v_B}{v_{CA}} &= \frac{\sqrt{\frac{GM_S}{R_B}}}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{GM_S}{R_A}}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R_A}{R_B}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{9}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Assim, a razão é:

$$\frac{v_B}{v_{CA}} = \boxed{2}$$

Etapas 5. Determine se CA estará no apoastro ou no periastro.

A energia mecânica total da órbita de CA está relacionada ao semieixo maior a_{CA} :

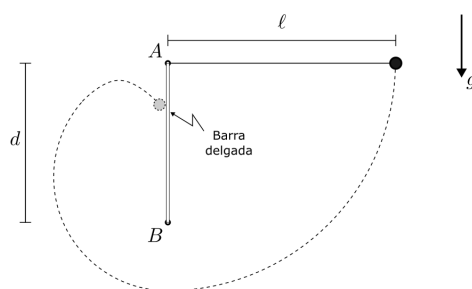
$$E_{CA} = -\frac{GM_S M_{CA}}{2a_{CA}}$$

Usando a relação $E_{CA} = 7 \cdot E_B$:

$$\begin{aligned}-\frac{GM_S M_{CA}}{2a_{CA}} &= 7 \cdot \left(-\frac{GM_S M_B}{2R_B}\right) \\ \frac{M_{CA}}{a_{CA}} &= \frac{7 \cdot M_B}{R_B} \\ a_{CA} &= \frac{M_{CA}}{M_B} \cdot \frac{R_B}{7} \\ a_{CA} &= 8 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{9}{16} R_A \\ a_{CA} &= \frac{9}{14} R_A\end{aligned}$$

Como $\frac{9}{14} < 1$, o semieixo maior de CA é menor que a distância atual do planeta à estrela ($a_{CA} < R_A$). Em uma órbita elíptica, o planeta encontra-se no apoastro quando sua distância até a estrela é maior do que o semieixo maior. Portanto, logo após a colisão, o planeta CA se encontra no apoastro.

Questão 3



Uma pequena esfera é presa ao ponto A indicado na figura por um fio de comprimento ℓ . Abaixo e na mesma vertical de A , a uma distância d , há o ponto B , de forma que uma barra delgada imóvel é fixada entre A e B .

Em um determinado momento, a esfera é posicionada à direita de A , de maneira que o fio esteja esticado na horizontal. Na sequência, a esfera é solta, passando a movimentar-se em uma trajetória que descreve um quarto de circunferência em torno de A e, ao passar por baixo do ponto B , parte do fio encosta e gruda na barra e a esfera continua seu movimento.

Dado:

- aceleração da gravidade: g .

Observação:

- o fio é inextensível e de massa desprezível.

Determine, em função de ℓ e de acordo com o contexto apresentado:

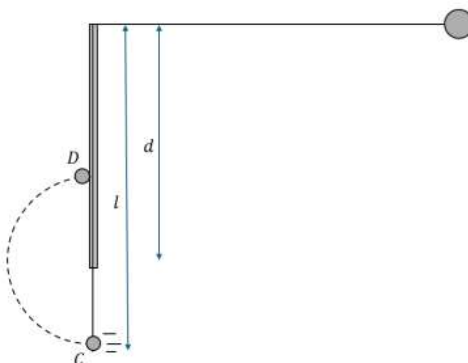
- o valor mínimo de d para que a trajetória descrita pela esfera após passar por baixo de B seja uma semicircunferência;
- o raio de curvatura instantâneo, caso $d = 3/7 \ell$, da trajetória da esfera em seu ponto mais alto após ter passado por baixo do ponto B .

Gabarito

A análise do movimento exige a conservação da energia mecânica aliada às condições da força centrípeta. Na primeira situação, garante-se que o fio permaneça tracionado até o topo da trajetória circular; na segunda situação, com o fio perdendo a tração antes do topo, o movimento converte-se num lançamento oblíquo submetido apenas à gravidade.

Etapa 1. Determine o valor mínimo de d .

Para que a esfera consiga percorrer uma semicircunferência completa logo após passar pelo ponto B , deve-se garantir que o fio se mantenha esticado (tracionado) durante todo o trajeto. O momento mais crítico do movimento é no ponto mais alto da semicircunferência (ponto D):



No ponto mais alto, a força resultante centrípeta é dada pelo peso e pela tração T :

$$\frac{mv_D^2}{(\ell - d)} = mg + T$$

A condição limite de tração nula ou positiva ($T \geq 0$) requer que:

$$\frac{mv_D^2}{\ell - d} - mg \geq 0 \quad (I)$$

A velocidade no topo da semicircunferência (v_D) pode ser obtida por meio da conservação da energia mecânica, comparando o instante em que a esfera é solta (altura do ponto A) com a sua passagem pelo ponto D (altura $\ell - 2d$ em relação a A, sendo o ponto B na altura nula de referência, etc... na verdade podemos estabelecer o ponto inferior do movimento como referencial, onde a altura é zero, a altura de A é ℓ , e a de D é $2(\ell - d)$). O equacionamento usando a referência no ponto mais baixo da trajetória é:

$$mg\ell = mg \cdot 2(\ell - d) + \frac{mv_D^2}{2}$$

$$mg\ell = 2mg\ell - 2mgd + \frac{mv_D^2}{2}$$

$$\frac{mv_D^2}{2} = mg(2d - \ell)$$

$$v_D^2 = 4gd - 2g\ell$$

Substituindo essa velocidade na equação (I):

$$\frac{m(4gd - 2g\ell)}{\ell - d} - mg \geq 0$$

$$\frac{mg(4d - 2\ell)}{\ell - d} \geq mg$$

$$4d - 2\ell \geq \ell - d$$

$$5d \geq 3\ell$$

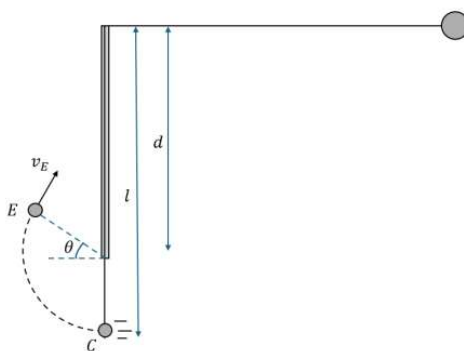
$$d \geq \frac{3\ell}{5}$$

Portanto, o valor mínimo é:

$$d_{\min} = \boxed{\frac{3\ell}{5}}$$

Etapla 2. Determine o raio de curvatura para $d = 3\ell/7$.

Como o valor de d adotado agora é menor que o mínimo necessário ($\frac{3\ell}{7} < \frac{3\ell}{5}$), o fio perde a tração (afrouxa) antes que a esfera atinja o topo da circunferência em torno de B. Deve-se localizar esse ponto onde a tração se anula (ponto E):



Impondo que a tração é zero no ponto E, a componente radial do peso atua como a resultante centrípeta:

$$mg \sin \theta = \frac{mv_E^2}{\ell - d} \quad (II)$$

A velocidade v_E é encontrada por conservação de energia (relativa à parte inferior da trajetória):

$$mg\ell = \frac{mv_E^2}{2} + mg(\ell - d)(1 + \sin \theta) \quad (III)$$

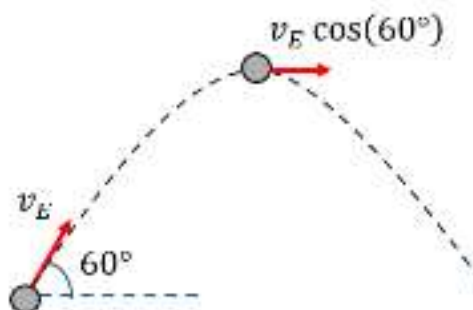
Substituindo a expressão para mv_E^2 obtida da equação (II) na equação (III):

$$\begin{aligned}
 mg\ell &= \frac{mg(\ell - d)\sin\theta}{2} + mg(\ell - d)(1 + \sin\theta) \\
 \ell &= \frac{(\ell - d)\sin\theta}{2} + (\ell - d) + (\ell - d)\sin\theta \\
 \ell - (\ell - d) &= (\ell - d)\left(\frac{\sin\theta}{2} + \sin\theta\right) \\
 d &= (\ell - d)\frac{3}{2}\sin\theta
 \end{aligned}$$

Substituindo $d = \frac{3\ell}{7}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{3\ell}{7} &= \left(\ell - \frac{3\ell}{7}\right)\frac{3}{2}\sin\theta \\
 \frac{3\ell}{7} &= \left(\frac{4\ell}{7}\right)\frac{3}{2}\sin\theta \\
 \frac{3}{7} &= \frac{6}{7}\sin\theta \\
 \sin\theta &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Logo, $\theta = 30^\circ$. A partir do momento em que o fio afrouxa, a esfera passa a realizar um lançamento oblíquo sob a ação exclusiva da gravidade, com velocidade inicial inclinada de 60° em relação à horizontal.



No ponto mais alto desse lançamento parabólico, a velocidade da esfera é exclusivamente horizontal ($v_x = v_E \cos(60^\circ)$) e toda a aceleração da gravidade atua perpendicularmente à velocidade, funcionando como aceleração centrípeta instantânea. Assim, o raio de curvatura R é dado por:

$$\begin{aligned}
 mg &= \frac{m(v_E \cos(60^\circ))^2}{R} \\
 g &= \frac{v_E^2(1/2)^2}{R} \\
 R &= \frac{v_E^2}{4g}
 \end{aligned}$$

Usando novamente a equação (II) para obter $v_E^2 = g(\ell - d)\sin\theta$:

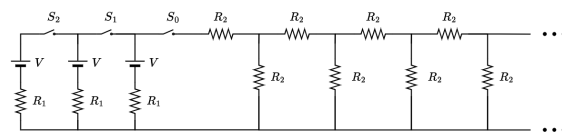
$$\begin{aligned}
 R &= \frac{g(\ell - d)\sin\theta}{4g} \\
 &= \frac{(\ell - d)\sin\theta}{4}
 \end{aligned}$$

Por fim, substituindo $d = \frac{3\ell}{7}$ e $\sin\theta = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{4}\left(\ell - \frac{3\ell}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{8}\left(\frac{4\ell}{7}\right) \\
 &= \frac{4\ell}{56} \\
 R &= \boxed{\frac{\ell}{14}}
 \end{aligned}$$



Questão 4



Considere o circuito da figura composto por três fontes iguais, três resistências de valor R_1 , três chaves e uma malha infinita de resistências de valor R_2 . Sabe-se que a chave S_0 é fechada em $t = 0$, a chave S_1 é fechada em $t = 20$ s, a chave S_2 é fechada em $t = 40$ s e que nenhuma das chaves muda seu estado após o fechamento.

Dados:

- $V = 40$ V;
- $R_1 = 6$ Ω ;
- $R_2 = (\sqrt{5} - 1)$ Ω .

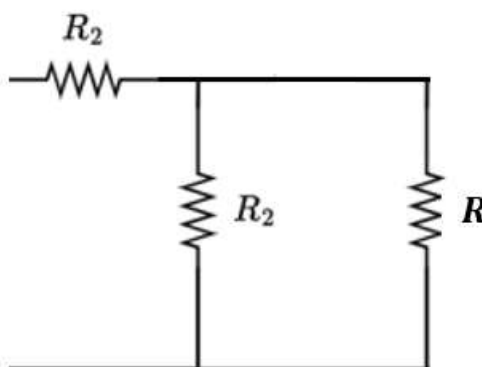
Dado o exposto, calcule o valor da energia total dissipada na malha infinita de resistências entre os instantes $t = 0$ e $t = 60$ s.

Gabarito

A energia dissipada deve ser calculada determinando-se primeiro a resistência equivalente da malha infinita. Em seguida, analisa-se o circuito em três intervalos de tempo distintos, de 20 s cada, conforme as chaves S_0 , S_1 e S_2 vão sendo fechadas, reduzindo a resistência do ramo das fontes.

Etapla 1. Determine a resistência equivalente da malha infinita.

Calculando a resistência equivalente R da associação infinita:



Como a malha é infinita, ao se retirar o primeiro par de resistores R_2 , o restante do circuito continua com resistência equivalente R . Assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} R_2 + \frac{R_2 R}{R_2 + R} &= R \\ R_2(R_2 + R) + R_2 R &= R(R_2 + R) \\ R_2^2 + R_2 R + R_2 R &= R R_2 + R^2 \\ R^2 - R_2 R - R_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação quadrática para R :

$$R = R_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Substituindo o valor de $R_2 = (\sqrt{5} - 1)$ Ω :



$$\begin{aligned} R &= (\sqrt{5} - 1)\Omega \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{5 - 1}{2} \Omega \\ &= 2 \Omega \end{aligned}$$

Etapa 2. Calcule a energia dissipada no primeiro intervalo ($t = 0$ a $t = 20$ s).

De 0 a 20 s, apenas a chave S_0 está fechada, de modo que há apenas um resistor $R_1 = 6 \Omega$ em série com a resistência equivalente R :

$$\begin{aligned} V &= (R_1 + R) \cdot i_1 \\ 40 \text{ V} &= (6 + 2)\Omega \cdot i_1 \\ i_1 &= 5 \text{ A} \end{aligned}$$

A potência dissipada na malha infinita é:

$$P_1 = R \cdot i_1^2 = 2 \Omega \cdot (5 \text{ A})^2 = 50 \text{ W}$$

A energia dissipada nesse intervalo de 20 s é:

$$E_1 = P_1 \cdot \Delta t = 50 \text{ W} \cdot 20 \text{ s} = 1000 \text{ J}$$

Etapa 3. Calcule a energia dissipada no segundo intervalo ($t = 20$ s a $t = 40$ s).

De 20 s a 40 s, as chaves S_0 e S_1 estão fechadas. Os dois resistores R_1 correspondentes ficam em paralelo, resultando em uma resistência equivalente de 3Ω para as fontes:

$$\begin{aligned} V &= (3 + 2)\Omega \cdot i_2 \\ 40 \text{ V} &= 5 \Omega \cdot i_2 \\ i_2 &= 8 \text{ A} \end{aligned}$$

A potência e a energia dissipada na malha infinita nesse intervalo de 20 s são:

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \Omega \cdot (8 \text{ A})^2 = 128 \text{ W} \\ E_2 &= 128 \text{ W} \cdot 20 \text{ s} = 2560 \text{ J} \end{aligned}$$

Etapa 4. Calcule a energia dissipada no terceiro intervalo ($t = 40$ s a $t = 60$ s).

De 40 s a 60 s, as chaves S_0 , S_1 e S_2 estão fechadas. Os três resistores R_1 ficam em paralelo, com resistência equivalente de 2Ω :

$$\begin{aligned} V &= (2 + 2)\Omega \cdot i_3 \\ 40 \text{ V} &= 4 \Omega \cdot i_3 \\ i_3 &= 10 \text{ A} \end{aligned}$$

A potência e a energia dissipada na malha infinita nesse intervalo são:

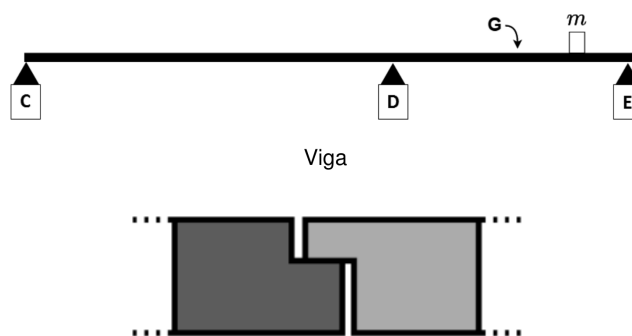
$$\begin{aligned} P_3 &= 2 \Omega \cdot (10 \text{ A})^2 = 200 \text{ W} \\ E_3 &= 200 \text{ W} \cdot 20 \text{ s} = 4000 \text{ J} \end{aligned}$$

Etapa 5. Calcule a energia total.

A energia total dissipada é a soma das energias de cada intervalo:

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= E_1 + E_2 + E_3 \\ &= 1000 + 2560 + 4000 \\ &= 7560 \text{ J} \\ E_{\text{total}} &= \boxed{7560 \text{ J}} \end{aligned}$$

Questão 5



Articulação

Uma viga homogênea de comprimento total L e massa M está apoiada horizontalmente em três apoios verticais simples indicados na figura por C, D e E. No trecho DE, repousa um bloco de massa m . No ponto G, localizado também no trecho DE, é instalada uma articulação que interrompe a continuidade estrutural da viga.

Dados:

- comprimento da viga: $L = 10 \text{ m}$;
- massa da viga: $M = 6 \text{ kg}$;
- distâncias entre os apoios: $CD = 6 \text{ m}$ e $DE = 4 \text{ m}$;
- distância entre a articulação e o apoio E: $GE = 2 \text{ m}$;
- distância entre o bloco de massa m e o apoio E: 1 m ;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Observações:

- a viga é considerada indeformável em todas as suas partes;
- após a instalação da articulação, a seção da viga entre os pontos G e E passa a ser apoiada em dois pontos: o dente da articulação em G e o apoio E.

Mediante o contexto, determine:

- as reações de apoio em C, D, E e G para $m = 4 \text{ kg}$;
- o maior valor de m de forma que a articulação consiga manter a viga em equilíbrio.

Gabarito

O equilíbrio da viga articulada pode ser analisado separando-se a estrutura em dois corpos rígidos: o trecho à direita da articulação (apoiado em G e E) e o trecho à esquerda (apoiado em C e D, sofrendo a reação da articulação em G). Determinando os pesos de cada trecho, calculam-se as forças a partir das equações de equilíbrio de translação e rotação.

Etapa 1. Determine o peso de cada trecho.

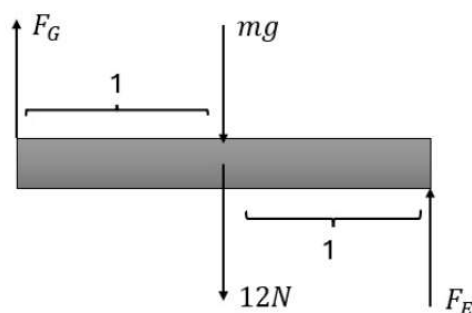
A densidade linear de massa da barra homogênea é:

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ kg/m}$$

A articulação G divide a viga em duas partes. A parte da direita (trecho GE) possui comprimento de 2 m , portanto sua massa é $m_{GE} = 1,2 \text{ kg}$ e seu peso é 12 N . A parte da esquerda (trecho CG) possui comprimento de 8 m , logo sua massa é $m_{CG} = 4,8 \text{ kg}$ e seu peso é 48 N .

Etapla 2. Analise o equilíbrio do trecho à direita da articulação (GE).

O trecho à direita tem comprimento de 2 m e atua sob a força normal de E (F_E), a força do dente da articulação em G apontando para cima (F_G), seu próprio peso (12 N) aplicado no meio do trecho (1 m de E) e o peso do bloco (mg) aplicado a 1 m de E.

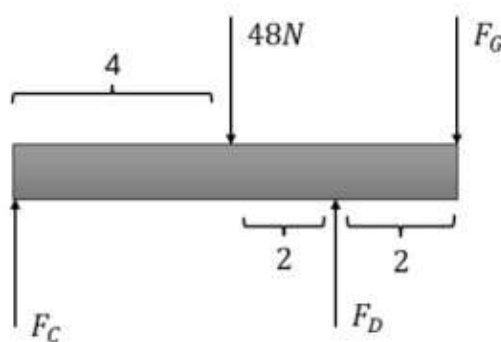


As equações de equilíbrio de força e de momento (em relação ao ponto G) são:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow F_E + F_G = mg + 12 \\ \sum M_G = 0 &\Rightarrow F_E \cdot 2 - 12 \cdot 1 - mg \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2F_E = 12 + mg\end{aligned}$$

Etapla 3. Analise o equilíbrio do trecho à esquerda da articulação (CG).

O trecho à esquerda tem comprimento de 8 m. Ele está apoiado em C e D e sofre o peso próprio (48 N) aplicado no seu centro de massa (4 m de G). Pela Terceira Lei de Newton, ele sofre uma força F_G da articulação apontando para baixo. O apoio C está a 8 m de G, e o apoio D está a 2 m de G.



As equações de equilíbrio de força e momento (em relação ao ponto G) são:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow F_C + F_D = 48 + F_G \\ \sum M_G = 0 &\Rightarrow 48 \cdot 4 - F_D \cdot 2 - F_C \cdot 8 = 0 \Rightarrow 2F_D + 8F_C = 192\end{aligned}$$

Etapla 4. Determine as reações para $m = 4$ kg.

Montando o sistema geral com as equações obtidas e isolando as variáveis em função de m :

$$\begin{cases} 2F_E = 12 + 10m \Rightarrow F_E = 6 + 5m \\ F_E + F_G = 12 + 10m \Rightarrow F_G = 12 + 10m - (6 + 5m) \Rightarrow F_G = 6 + 5m \\ 4F_C + F_D = 96 \Rightarrow F_D = 96 - 4F_C \\ F_C + F_D - F_G = 48 \Rightarrow F_C + (96 - 4F_C) - (6 + 5m) = 48 \Rightarrow 3F_C = 42 - 5m \Rightarrow F_C = 14 - \frac{5m}{3} \end{cases}$$

Da expressão de F_C , pode-se encontrar F_D :

$$F_D = 96 - 4\left(14 - \frac{5m}{3}\right) = 96 - 56 + \frac{20m}{3} = 40 + \frac{20m}{3}$$

Para $m = 4$ kg, substituem-se os valores nas expressões:

$$F_E = 6 + 5(4) = 26 \text{ N}$$

$$F_G = 6 + 5(4) = 26 \text{ N}$$

$$F_C = 14 - \frac{5(4)}{3} = \frac{42 - 20}{3} = \frac{22}{3} \text{ N}$$

$$F_D = 40 + \frac{20(4)}{3} = \frac{120 + 80}{3} = \frac{200}{3} \text{ N}$$

Assim, as reações pedidas são:

$$F_E = \boxed{26 \text{ N}}, \quad F_G = \boxed{26 \text{ N}}, \quad F_C = \boxed{\frac{22}{3} \text{ N}}, \quad F_D = \boxed{\frac{200}{3} \text{ N}}$$

Etapla 5. Determine o maior valor possível de m .

Para que a viga permaneça em equilíbrio, as reações nos apoios verticais simples (que não podem “puxar” a viga para baixo) devem ser maiores ou iguais a zero. O apoio que primeiro tende a perder o contato (ficar com reação nula) à medida que m aumenta é o apoio C, o mais distante do bloco. Logo, impõe-se a condição $F_C \geq 0$:

$$F_C = 14 - \frac{5m}{3} \geq 0$$

$$\frac{5m}{3} \leq 14$$

$$m \leq \frac{42}{5}$$

$$m \leq 8,4$$

Portanto, o valor máximo da massa é:

$$m_{\text{máx}} = \boxed{8,4 \text{ kg}}$$

Questão 6

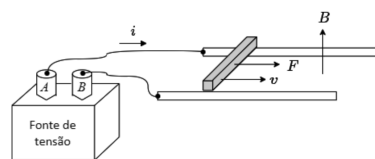


Figura 1: Esquemático do dispositivo

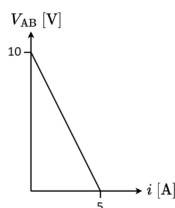


Figura 2: Característica terminal da fonte

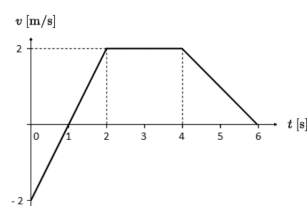


Figura 3: Velocidade da barra

A Figura 1 mostra o esquemático de um dispositivo contendo uma fonte de tensão cujos terminais são conectados às extremidades de um trilho, sobre o qual se encontra apoiada uma barra, que é submetida a uma força horizontal variável $F(t)$. A região do trilho está sujeita a uma densidade de fluxo magnético B , com direção e sentido também indicados nessa figura. A característica terminal da fonte é mostrada na Figura 2 e a velocidade de deslocamento da barra sobre os trilhos é mostrada na Figura 3.

Dados:

- massa da barra: 5 kg;
- comprimento da barra: 1 m;
- módulo de $B = 2,5 \text{ T}$;
- resistência da barra: 2Ω .

Observações:

- não há atrito no deslocamento da barra sobre os trilhos;
- as resistências elétricas dos trilhos e das conexões são desprezíveis;
- a força $F(t)$ é tal que estabeleça as condições apresentadas nos gráficos;
- todas as grandezas indicadas nos gráficos estão em unidades do sistema internacional.

Diante do exposto, determine:

- o menor módulo de corrente no intervalo $0 \leq t \leq 6 \text{ s}$;
- a energia total dissipada pela resistência interna da fonte no intervalo $2 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}$;
- o módulo e o sentido de $F(t)$ em $t = 5 \text{ s}$.

Gabarito

O circuito elétrico é modelado associando-se a fonte de tensão real com a força eletromotriz induzida pelo movimento da barra no campo magnético. A corrente em cada instante depende do sentido e do módulo da velocidade da barra. Após determinar as expressões para a corrente, calculam-se a energia dissipada na resistência interna e a força mecânica externa necessária por meio das leis de Newton aplicadas à barra.

Etapa 1. Estabeleça as equações da fonte e da fem induzida.

A partir do gráfico da Figura 2 (tensão em função da corrente), determina-se a equação do gerador (fonte real). A tensão de circuito aberto é a força eletromotriz $E = 10 \text{ V}$, e a resistência interna r é a inclinação da reta, que decresce 10 V para um aumento de 5 A , ou seja, $r = 10/5 = 2 \Omega$. A equação fica:

$$V_{AB} = 10 - 2i$$

A barra se movendo em um campo magnético uniforme perpendicular à sua velocidade induz uma força eletromotriz de módulo:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\text{ind}}| &= BL|v| \\ &= 2,5 \text{ T} \cdot 1 \text{ m} \cdot |v| \\ &= 2,5|v| \end{aligned}$$

Etapa 2. Determine o menor módulo de corrente.

O circuito completo possui a fonte de tensão ($E = 10 \text{ V}$, $r = 2 \Omega$), a barra metálica (com resistência elétrica $R_{\text{barra}} = 2 \Omega$) e a fem induzida ε_{ind} . Existem dois intervalos de tempo a analisar, pois a velocidade muda de sentido (de negativa para positiva em $t = 2 \text{ s}$), o que inverte a polaridade da fem induzida.

Intervalo $0 \leq t \leq 2 \text{ s}$ (velocidade negativa): A barra se move para a esquerda. Pela regra da mão direita, a fem induzida tem sentido de B para A, operando como receptor em oposição à fonte de 10 V (que empurra de B para A no circuito externo, ou seja, também de B para A na barra. Espera: a fonte tem o terminal positivo em A. Assim, ela tenta produzir corrente saindo de A. O fluxo magnético é para cima. A barra indo para a esquerda ($-x$), $v \times B$ está no sentido de $-y$ (de A para B). Logo a fem induzida aponta de A para B, oposta à fonte). Resolvendo a malha:

$$\begin{aligned} 10 - 2i - \varepsilon_{\text{ind}} - 2i &= 0 \\ 4i &= 10 - 2,5|v| \\ i &= 2,5 - 0,625|v| \end{aligned}$$

Para encontrar a corrente mínima nesse intervalo, deve-se usar o maior valor de $|v|$. Entre 0 e 2 s , o valor máximo da velocidade em módulo é $|v| = 2 \text{ m/s}$ (em $t = 0$):

$$\begin{aligned} i &= 2,5 - 0,625(2) \\ &= 2,5 - 1,25 \\ &= 1,25 \text{ A} \end{aligned}$$

Intervalo $2 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$ (velocidade positiva): A barra se move para a direita. O sentido da fem induzida inverte-se, passando a somar-se (mesmo sentido) à fem da fonte de tensão na malha. A equação da malha é:

$$\begin{aligned} 10 - 2i + \varepsilon_{\text{ind}} - 2i &= 0 \\ 4i &= 10 + 2,5|v| \\ i &= 2,5 + 0,625|v| \end{aligned}$$

A corrente mínima ocorre quando a velocidade é mínima em módulo ($v = 0 \text{ m/s}$ em $t = 2 \text{ s}$ e $t = 6 \text{ s}$):

$$\begin{aligned} i &= 2,5 + 0,625(0) \\ &= 2,5 \text{ A} \end{aligned}$$

Comparando os dois intervalos, o menor módulo da corrente elétrica é:

$$i_{\text{min}} = \boxed{1,25 \text{ A}}$$

Etapa 3. Calcule a energia dissipada na fonte entre 2 s e 4 s .

No intervalo $2 \leq t \leq 4 \text{ s}$, a velocidade da barra é constante e positiva, valendo $v = 2 \text{ m/s}$. Nesse caso, a corrente elétrica calculada para velocidades positivas é:

$$\begin{aligned} i &= 2,5 + 0,625|v| \\ &= 2,5 + 0,625(2) \\ &= 3,75 \text{ A} \end{aligned}$$

A resistência interna da fonte é $r = 2 \, \Omega$. A potência dissipada nessa resistência é constante:

$$P_{\text{diss}} = r \cdot i^2 = 2 \, \Omega \cdot (3,75 \text{ A})^2 = 2 \cdot 14,0625 = 28,125 \text{ W}$$

A energia dissipada ao longo do intervalo de tempo $\Delta t = 2 \text{ s}$ é:

$$\begin{aligned} E_{\text{diss}} &= P_{\text{diss}} \cdot \Delta t \\ &= 28,125 \text{ W} \cdot 2 \text{ s} \\ &= 56,25 \text{ J} \\ E_{\text{diss}} &= \boxed{56,25 \text{ J}} \end{aligned}$$

Etapla 4. Determine o módulo e o sentido de $F(t)$ em $t = 5 \text{ s}$.

No instante $t = 5 \text{ s}$, a aceleração da barra é constante e corresponde à inclinação da reta da velocidade na Figura 3 entre 4 e 6 s:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 2}{6 - 4} = -1 \text{ m/s}^2$$

Como a massa da barra é $m = 5 \text{ kg}$, o módulo da força resultante nela é:

$$F_{\text{res}} = m|a| = 5 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 5 \text{ N}$$

Sendo a aceleração negativa, essa resultante aponta para a esquerda. Neste mesmo instante, a velocidade da barra é $v = 1 \text{ m/s}$ (obtida graficamente, no ponto médio do segmento). A corrente elétrica vale:

$$\begin{aligned} i &= 2,5 + 0,625|v| \\ &= 2,5 + 0,625(1) \\ &= 3,125 \text{ A} \end{aligned}$$

Para a barra com $v > 0$ (movendo-se à direita), a fonte prevalece e a corrente flui do terminal A para o B através do trilho. A força magnética produzida por essa corrente, num campo vertical para cima, atua no sentido negativo do eixo x (para a esquerda, opondo-se ao movimento da barra, de acordo com a Lei de Lenz). O módulo dessa força é:

$$\begin{aligned} F_{\text{mag}} &= BiL \\ &= 2,5 \text{ T} \cdot 3,125 \text{ A} \cdot 1 \text{ m} \\ &= 7,8125 \text{ N} \end{aligned}$$

A equação de forças na direção do movimento é a soma da força externa aplicada F com a força magnética e resulta em força para a esquerda (-5 N):

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{res}} &= \vec{F} + \vec{F}_{\text{mag}} \\ -5 &= F_x + (-7,8125) \\ F_x &= 7,8125 - 5 \\ F_x &= 2,8125 \text{ N} \end{aligned}$$

O resultado positivo indica que a força $F(t)$ mecânica deve ser aplicada no sentido $+x$ (para a direita). Portanto, a força vale

$\boxed{2,8125 \text{ N}}$ para a $\boxed{\text{direita}}$.

Questão 7

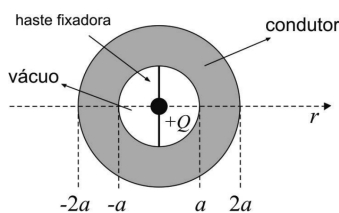


Figura 1

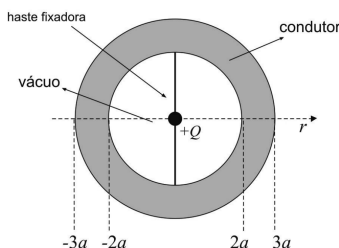


Figura 2

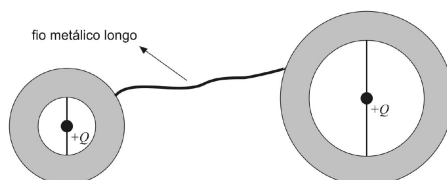


Figura 3

A Figura 1 mostra uma casca metálica condutora de espessura a com uma partícula de carga $+Q$ fixada no centro de uma cavidade esférica no vácuo de raio a . Já a Figura 2 mostra uma casca de mesma espessura a , com uma cavidade esférica de raio $2a$ e também com uma partícula de mesma carga $+Q$ fixada em seu centro.

Dado:

- constante eletrostática do meio: k .

Observações:

- as hastes que fixam as cargas são constituídas por material isolante;
- as cascas estão muito distantes uma da outra;
- inicialmente, cada casca esférica possui carga total nula;
- o potencial elétrico no infinito é nulo.

Considerando a geometria das figuras:

- calcule o potencial elétrico em $r = a$ no circuito da Figura 1;
- esboce o gráfico de “potencial elétrico *versus* r ” para o circuito da Figura 2, destacando os valores de potencial em $r = a$, $r = 2a$ e $r = 3a$;
- após curto-circuitar as cascas com um fio metálico muito longo (situação da Figura 3) e depois de algum tempo retirar o fio, determine as cargas resultantes, após o equilíbrio eletrostático, nas superfícies internas e externas de cada uma das duas cascas.

Gabarito

O comportamento das cascas esféricas metálicas rege-se pelos princípios de indução eletrostática e blindagem. As cargas centrais induzem cargas opostas nas superfícies internas, transferindo o excesso para as superfícies externas. Após a conexão por um fio, as superfícies externas das cascas equalizam seus potenciais através de troca de carga elétrica, enquanto as superfícies internas mantêm suas cargas blindadas pelas partículas centrais.

Etapa 1. Calcule o potencial elétrico em $r = a$ (Figura 1).

Devido à indução eletrostática provocada pela partícula de carga $+Q$ no centro, forma-se uma carga induzida de $-Q$ na superfície interna da casca esférica (em $r = a$). Como a carga total da casca isolada é nula, surge uma carga induzida de $+Q$ na superfície externa (em $r = 2a$).

Pelo princípio da superposição, o potencial elétrico na posição $r = a$ é a soma dos potenciais gerados pela carga pontual central, pela carga uniformemente distribuída na superfície interna e pela carga uniformemente distribuída na superfície externa:

$$V(a) = \frac{k(+Q)}{a} + \frac{k(-Q)}{a} + \frac{k(+Q)}{2a}$$

A contribuição da carga central cancela a contribuição da superfície interna em sua borda, restando apenas o potencial gerado pela superfície externa:

$$V(a) = \boxed{+\frac{kQ}{2a}}$$

Etapa 2. Esboce o gráfico do potencial elétrico (Figura 2).

Analogamente, na casca esférica da Figura 2, a indução faz surgir uma carga $-Q$ na superfície interna (em $r = 2a$) e uma carga $+Q$ na superfície externa (em $r = 3a$). Analisando o potencial elétrico em cada região do espaço, tem-se as somas das contribuições das três distribuições:

- **Para a região da cavidade ($0 < r \leq 2a$):** A carga central contribui com $\frac{k(+Q)}{r}$, a superfície interna (que envolve o ponto) contribui uniformemente com $\frac{k(-Q)}{2a}$ e a superfície externa contribui com $\frac{k(+Q)}{3a}$.

$$V(r) = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{2a} + \frac{kQ}{3a} = kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{6a} \right)$$

Nos pontos notáveis dessa região: Em $r = a$:

$$V(a) = kQ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{6a} \right) = \frac{5}{6} \frac{kQ}{a}$$

Em $r = 2a$:

$$V(2a) = kQ \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{6a} \right) = \frac{kQ}{a} \left(\frac{3-1}{6} \right) = \frac{1}{3} \frac{kQ}{a}$$

- **Para o interior do material condutor ($2a \leq r \leq 3a$):** Como a região é um condutor em equilíbrio, o campo é nulo e o potencial é constante e igual ao da superfície externa:

$$V(r) = \frac{k(+Q)}{r} + \frac{k(-Q)}{r} + \frac{k(+Q)}{3a} = +\frac{kQ}{3a}$$

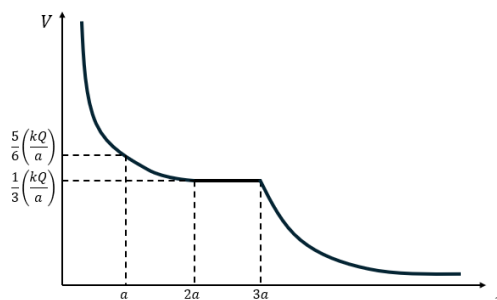
Em $r = 3a$:

$$V(3a) = \frac{1}{3} \frac{kQ}{a}$$

- **Para o exterior da casca ($r \geq 3a$):** O potencial fora de uma casca esférica com simetria radial é equivalente ao de uma carga pontual na origem equivalente à carga total do sistema (neste caso, a carga $+Q$ da casca mais a carga $+Q$ central). Wait, a carga total da casca é nula, e a carga central é $+Q$. Então a carga total englobada por uma gaussiana externa é $+Q$.

$$V(r) = \frac{k(+Q)}{r} + \frac{k(-Q)}{r} + \frac{k(+Q)}{r} = +\frac{kQ}{r}$$

Com isso, o gráfico do potencial elétrico em função da distância r ao centro assume o perfil esperado:



Etapa 3. Determine as cargas nas superfícies após o curto-circuito.

Ao realizar o contato com um fio longo entre as esferas, os corpos trocarão carga entre si até que os potenciais elétricos de suas superfícies externas se igualem. No entanto, as partículas permanecem fixas no centro das esferas isoladamente blindadas. Dessa forma, a indução produzida na superfície interna depende apenas da partícula no seu interior e não é alterada pela carga depositada na superfície externa.

Assim, para cada casca esférica (tanto a da Fig. 1 quanto a da Fig. 2), a carga na sua superfície interna permanece igual ao oposto da carga central correspondente:

$$Q_{\text{interna (1)}} = Q_{\text{interna (2)}} = \boxed{-Q}$$

Seja Q_1 a carga final na superfície externa da primeira casca (a de raio exterior $2a$) e Q_2 a carga final na superfície externa da segunda casca (a de raio exterior $3a$). Igualando os potenciais elétricos nas superfícies externas das duas cascas (sendo que as superfícies e a carga central das cascas geram potencial apenas em relação aos seus próprios centros, já que elas estão muito distantes, não interferindo uma na outra de acordo com as aproximações de cascas isoladas):

$$V_{\text{ext 1}} = \frac{k(+Q)}{2a} + \frac{k(-Q)}{2a} + \frac{k(+Q_1)}{2a} = \frac{k(+Q_1)}{2a}$$

$$V_{\text{ext 2}} = \frac{k(+Q)}{3a} + \frac{k(-Q)}{3a} + \frac{k(+Q_2)}{3a} = \frac{k(+Q_2)}{3a}$$

Portanto:

$$\frac{k(+Q_1)}{2a} = \frac{k(+Q_2)}{3a}$$

$$\frac{Q_1}{2} = \frac{Q_2}{3}$$

A carga total conservada nas superfícies externas é a soma das cargas iniciais externas das duas cascas ($+Q$ da primeira mais $+Q$ da segunda, totalizando $+2Q$):

$$Q_1 + Q_2 = 2Q$$

Resolvendo o sistema:

$$Q_1 + \frac{3Q_1}{2} = 2Q$$

$$\frac{5Q_1}{2} = 2Q$$

$$Q_1 = \frac{4}{5}Q$$

$$Q_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{5}Q \right) = \frac{6}{5}Q$$

As cargas finais nas superfícies externas, em equilíbrio eletrostático, são:

- Para a casca de raio $2a$:

$$Q_{\text{externa (1)}} = \boxed{\frac{4Q}{5}}$$

- Para a casca de raio $3a$:

$$Q_{\text{externa (2)}} = \boxed{\frac{6Q}{5}}$$

Questão 8

Um citricultor contrata os serviços de um engenheiro para especificar uma câmara frigorífica cujo objetivo é congelar certo suco de fruta para exportação. Uma tonelada de produto entra no equipamento na fase líquida e lá deve permanecer até atingir a temperatura de -27°C . Mais especificamente, o citricultor está interessado em uma estimativa inicial da potência de acionamento do compressor tendo em vista os custos crescentes da tarifa elétrica. O engenheiro afirma que um dispositivo com 30 HP de potência deve atender, com folga, ao requisito.

Dados:

- calor específico do suco na fase líquida: $1,0 \text{ kcal}/(\text{kg } ^{\circ}\text{C})$;
- calor específico do suco na fase sólida: $0,5 \text{ kcal}/(\text{kg } ^{\circ}\text{C})$;
- calor latente de solidificação do suco: $72,5 \text{ kcal/kg}$;
- temperatura inicial do suco: 33°C ;
- ponto de congelamento do suco: -2°C ;
- temperatura no interior da câmara frigorífica: -27°C ;
- temperatura do ambiente onde se situa a câmara frigorífica: $34,5^{\circ}\text{C}$;
- coeficiente de desempenho do equipamento: $3/4$ do referente ao Ciclo de Carnot;
- duração estimada do processo de congelamento: 96 minutos;
- $1 \text{ cal} = 4 \text{ J}$;
- $1 \text{ HP} = 3/4 \text{ kW}$.

Empregando os dados listados acima:

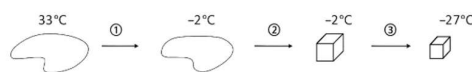
- realize uma análise termodinâmica do problema em questão e avalie a potência do compressor, em HP;
- compare seu resultado com o valor mencionado pelo engenheiro e discuta se a estimativa é procedente.

Gabarito

A questão consiste em avaliar a potência mínima de um sistema de refrigeração. Para isso, calcula-se o calor total que deve ser retirado do produto (suco de fruta) para levá-lo de sua temperatura inicial até a temperatura de armazenamento, passando por uma mudança de estado. Em seguida, usando o coeficiente de desempenho (COP) real do ciclo, calcula-se o trabalho demandado pelo compressor no intervalo de tempo estabelecido.

Etapa 1. Determine o calor a ser retirado do suco.

O calor sensível da fase líquida (Q_1), o calor latente de solidificação (Q_2) e o calor sensível da fase sólida (Q_3) compõem a energia total a ser retirada (em módulo):



$$|Q| = |Q_1| + |Q_2| + |Q_3|$$

$$= |mc_L \Delta T_L| + |mL| + |mc_S \Delta T_S|$$

Substituindo a massa $m = 1000 \text{ kg}$ e os demais valores:

$$|Q| = |1000 \cdot 1,0 \cdot (-2 - 33)| + |1000 \cdot (-72,5)| + |1000 \cdot 0,5 \cdot (-27 - (-2))|$$

$$= |1000 \cdot (-35)| + |-72500| + |500 \cdot (-25)|$$

$$= 35000 + 72500 + 12500$$

$$= 120000 \text{ kcal}$$

Convertendo para joules (sabendo que $1 \text{ cal} = 4 \text{ J}$, então $1 \text{ kcal} = 4 \text{ kJ}$):

$$|Q| = 120000 \cdot 4 \text{ kJ}$$

$$= 480000 \text{ kJ}$$

Esse é o calor retirado da fonte fria (Q_F).

Etapla 2. Calcule o coeficiente de desempenho do refrigerador.

O refrigerador opera entre a fonte fria ($T_F = -27^\circ\text{C}$) e a fonte quente ambiente ($T_Q = 34,5^\circ\text{C}$). Convertendo as temperaturas para a escala Kelvin:

$$T_F = -27 + 273 = 246 \text{ K}$$

$$T_Q = 34,5 + 273 = 307,5 \text{ K}$$

O coeficiente de desempenho (COP, ou eficiência ε) do ciclo de Carnot correspondente é:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{Carnot}} &= \frac{T_F}{T_Q - T_F} \\ &= \frac{246}{307,5 - 246} \\ &= \frac{246}{61,5} \\ &= 4\end{aligned}$$

O coeficiente de desempenho do equipamento real é $3/4$ do valor máximo teórico de Carnot:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{3}{4} \cdot \varepsilon_{\text{Carnot}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 4 \\ &= 3\end{aligned}$$

Etapla 3. Determine a potência de acionamento.

A relação entre o calor extraído da fonte fria, o trabalho do compressor e a eficiência é dada por:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{Q_F}{|\tau|} \\ 3 &= \frac{480000}{|\tau|} \\ |\tau| &= 160\,000 \text{ kJ}\end{aligned}$$

Esse trabalho deve ser realizado em um intervalo de tempo $\Delta t = 96 \text{ min}$. Convertendo para segundos:

$$\Delta t = 96 \cdot 60 = 5760 \text{ s}$$

A potência média do compressor em quilowatts é:

$$\begin{aligned}P &= \frac{|\tau|}{\Delta t} \\ &= \frac{160000}{5760} \\ &= \frac{250}{9} \text{ kW}\end{aligned}$$

Como $1 \text{ HP} = 3/4 \text{ kW}$, ou seja, $1 \text{ kW} = 4/3 \text{ HP}$, a potência em HP é:

$$\begin{aligned}P &= \frac{250}{9} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{1000}{27} \text{ HP}\end{aligned}$$

Realizando a divisão:

$$P \approx 37,04 \text{ HP}$$

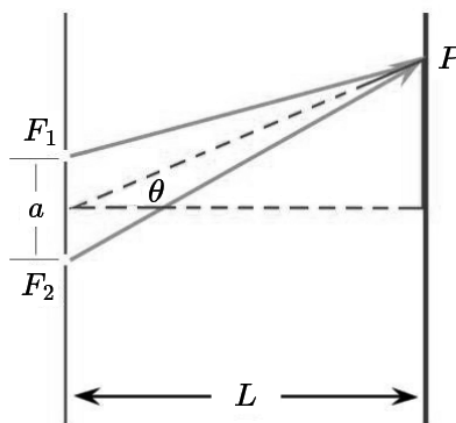
Logo, a potência é de aproximadamente:

$$P \approx 37 \text{ HP}$$

Etapla 4. Avalie a estimativa do engenheiro.

Comparando o valor demandado pelo processo (mínimo de $\approx 37 \text{ HP}$) com a potência sugerida de 30 HP , conclui-se que o compressor indicado não atende aos requisitos e será incapaz de resfriar a carga no prazo estipulado. Portanto, a estimativa do engenheiro não é procedente.

Questão 9



Considere o sistema da figura com duas fontes de luz monocromática pontuais, F_1 e F_2 , que estão em fase. A distância entre as fontes é denotada por a . A intensidade da fonte F_1 num ponto P genérico do anteparo, dada por $I_1(\theta)$, é $1/3$ da intensidade da fonte F_2 no mesmo ponto P .

Observação:

- a intensidade luminosa é proporcional ao quadrado da amplitude da onda.

Dados:

- comprimento de onda da luz emitida pelas fontes: λ ;
- $L \gg a$.

Determine a intensidade luminosa:

- resultante em um ponto P localizado no anteparo, em função de $I_1(\theta)$, θ , λ e a ;
- no primeiro máximo local de intensidade, para $\theta > 0$, em função de $I_1(\theta)$;
- no primeiro mínimo local de intensidade, para $\theta > 0$, em função de $I_1(\theta)$.

Gabarito

O fenômeno descrito é a interferência de ondas luminosas oriundas de fendas duplas (experimento de Young). Como $L \gg a$, os raios que chegam ao ponto P são praticamente paralelos, o que permite calcular a diferença de caminho óptico de forma puramente geométrica e, com isso, determinar a intensidade da superposição.

Etapa 1. Determine a intensidade resultante em função de θ .

A intensidade resultante da superposição de duas ondas coerentes com intensidades I_1 e I_2 e defasagem $\Delta\phi$ é dada pela equação de interferência:

$$I_{\text{res}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$$

Pelo enunciado, a intensidade da segunda fonte é o triplo da intensidade da primeira: $I_2 = 3I_1$.

A diferença de fase $\Delta\phi$ depende da diferença de caminho óptico Δx entre os raios provenientes de F_1 e F_2 que atingem o ponto P . Pela aproximação para $L \gg a$:

$$\Delta x = a \sin \theta$$

A defasagem correspondente a essa diferença de caminho, sendo as fontes inicialmente em fase, é:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \\ &= \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \end{aligned}$$

Substituindo I_2 e $\Delta\phi$ na equação da intensidade:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{res}} &= I_1 + 3I_1 + 2\sqrt{I_1 \cdot 3I_1} \cos\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) \\
 &= 4I_1 + 2\sqrt{3I_1^2} \cos\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) \\
 &= 4I_1 + 2I_1\sqrt{3} \cos\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) \\
 &= I_1 \left[4 + 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$I_{\text{res}} = I_1(\theta) \left(4 + 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}\right) \right)$$

Etapla 2. Determine a intensidade no primeiro máximo local.

Os máximos de interferência ocorrem quando a diferença de caminho é um múltiplo inteiro de comprimentos de onda, ou seja, $\Delta x = m\lambda$. O primeiro máximo local para $\theta > 0$ ocorre para $m = 1$:

$$a \sin \theta = \lambda$$

Nessas condições, o argumento do cosseno torna-se:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi(\lambda)}{\lambda} = 2\pi$$

Substituindo na expressão da intensidade:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{res}} &= I_1 \left[4 + 2\sqrt{3} \cos(2\pi) \right] \\
 &= I_1 \left[4 + 2\sqrt{3}(1) \right]
 \end{aligned}$$

$$I_{\text{max}} = I_1(\theta) (4 + 2\sqrt{3})$$

Etapla 3. Determine a intensidade no primeiro mínimo local.

Os mínimos de interferência ocorrem quando a diferença de caminho é um múltiplo ímpar de meio comprimento de onda, isto é, $\Delta x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$. O primeiro mínimo local para $\theta > 0$ ocorre para $m = 0$:

$$a \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

Para esse caso, o argumento do cosseno é:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda} = \pi$$

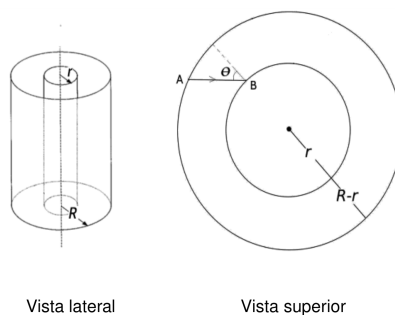
Substituindo na expressão da intensidade:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{res}} &= I_1 \left[4 + 2\sqrt{3} \cos(\pi) \right] \\
 &= I_1 \left[4 + 2\sqrt{3}(-1) \right]
 \end{aligned}$$

$$I_{\text{min}} = I_1(\theta) (4 - 2\sqrt{3})$$



Questão 10



Sejam dois cilindros coaxiais de raios R e r , com $R > r$. O cilindro de raio R tem sua superfície interna espelhada, enquanto a superfície externa do cilindro de raio r também é espelhada.

Um feixe estreito de luz se propaga entre os espelhos em um plano perpendicular ao eixo dos cilindros. O feixe luminoso parte do ponto A , é refletido no ponto B e, a partir daí, continua sua trajetória entre os espelhos.

Considerando que o sistema esteja ajustado à razão $r/R = \sqrt{3}/2$ para que haja n pontos de reflexão em cada espelho, onde $n \in \mathbb{N}$, e que os raios se sobrepõem após uma volta, calcule:

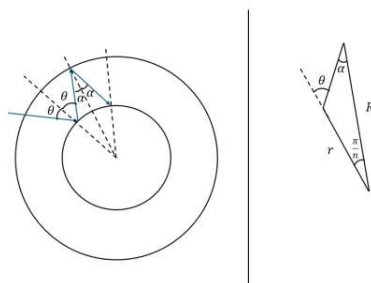
- a) a expressão de $\tan \theta$ em função de n ;
- b) os valores possíveis de n .

Gabarito

O traçado dos raios luminosos reflete a geometria de um polígono regular inscrito na coroa circular formada pelos espelhos. A lei dos senos aplicada ao triângulo formado pelo raio luminoso e pelos raios dos cilindros permite relacionar os ângulos de reflexão com o número de lados do polígono. O limite superior e inferior do número de reflexões é dado pela restrição geométrica para a formação dos ângulos e a não oclusão da luz.

Etapla 1. Determine a expressão de $\tan \theta$ em função de n .

O esquema mostra o caminho do raio de luz ao refletir entre as faces dos cilindros:



Para que haja n pontos de reflexão em cada espelho e os raios se sobreponham após uma volta, os pontos de reflexão no espelho externo dividem a circunferência de raio R em n arcos iguais. Dessa forma, o ângulo central associado ao segmento da trajetória entre duas reflexões consecutivas é $\frac{2\pi}{n}$, e a metade desse ângulo, correspondente ao percurso entre uma reflexão externa e a reflexão interna, vale $\frac{\pi}{n}$.

No triângulo esquematizado, analisando o ângulo externo θ , tem-se a relação:

$$\alpha + \frac{\pi}{n} = \theta$$

Logo, $\alpha = \theta - \frac{\pi}{n}$.

Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo de lados correspondentes aos raios R , r e ângulo α :

$$\frac{R}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{r}{\sin \alpha}$$

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sin \theta \cdot \frac{r}{R}$$

Substituindo α e a razão $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) = \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Expandindo o seno da diferença:

$$\sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos \theta = \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dividindo toda a equação por $\cos \theta$ para encontrar a tangente:

$$\tan \theta \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \tan \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta \left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

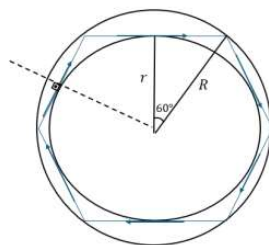
Isolando $\tan \theta$, obtém-se a expressão:

$$\tan \theta = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Etapla 2. Determine os valores possíveis de n .

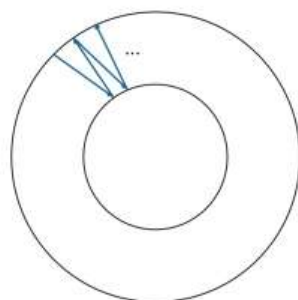
O caso limite para que ocorram reflexões no cilindro menor é quando o raio de luz é rasante (tangente) à sua superfície, isto é, quando o ângulo θ atinge seu valor máximo possível de 90° . Pela relação dos raios e trigonometria do triângulo retângulo:

$$\sin \alpha_{\text{limite}} = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha_{\text{limite}} = 60^\circ$$



Nesse caso limite, o raio formaria o lado de um hexágono regular inscrito na circunferência de raio R , cujo ângulo central correspondente é 60° e o número de vértices seria $n = 6$. Contudo, para $n = 6$, o raio luminoso apenas resvala no cilindro menor, sem incidir efetivamente e refletir, logo não cumpre a premissa de que há reflexões no espelho de raio r . Assim, deve-se ter $n > 6$ para que haja de fato uma reflexão intermitente entre as duas superfícies (percurso em “zigue-zague”).

Para $n > 6$, o ângulo θ assume valores menores que 90° e o raio incide normalmente sobre as duas cascas. Aumentando-se n , os ângulos tornam-se cada vez mais próximos do sentido radial ($\theta \rightarrow 0^\circ$ quando $n \rightarrow \infty$).





Como a expressão da tangente exige que seu denominador seja positivo ou tendendo à raiz da solução (já que $\tan \theta$ para $0 < \theta < 90^\circ$ é positiva), tem-se:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{6} \Rightarrow n > 6$$

Portanto, os valores possíveis para n são todos os números naturais estritamente maiores que 6:

$$n = \boxed{7, 8, 9, \dots} \quad (\text{ou seja, } \boxed{n > 6})$$