

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Seja i tal que $i^2 = -1$. Considere o número complexo $z = a + \beta i$, sendo a e β números inteiros não nulos. Sabendo que $z^3 = -9 + 46i$, determine a e β .

Gabarito

O problema pode ser resolvido igualando as partes real e imaginária de z^3 , ou utilizando a sua forma trigonométrica. Apresentamos duas resoluções.

Etapa 1. Solução 1: Via sistema algébrico

Note que:

$$\begin{aligned} z^3 &= (a + \beta i)^3 \\ &= a^3 + 3a^2\beta i - 3a\beta^2 - \beta^3 i \\ &= (a^3 - 3a\beta^2) + (3a^2\beta - \beta^3)i \\ &= -9 + 46i \end{aligned}$$

Daí, $a^3 - 3a\beta^2 = -9$ e $3a^2\beta - \beta^3 = 46$. Como a e β são inteiros não nulos:

$$3\beta^2 = \frac{9 + a^3}{a} \quad (*)$$

Como o lado esquerdo é inteiro, devemos ter que:

$$a \mid 9 + a^3 \Rightarrow a \mid 9 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 3, \pm 9.$$

Testando as soluções em (*), achamos os pares $(3, \pm 2)$ e $(-3, \pm 2)$. Testando os pares em $3a^2\beta - \beta^3 = 46$, o único que funciona é $(3, 2)$.

Logo, os valores são:

$$a = 3 \text{ e } \beta = 2$$

Etapa 2. Solução 2: Via módulo e forma trigonométrica

Note que o módulo de z^3 é:

$$|z^3| = \sqrt{(-9)^2 + 46^2} = \sqrt{2197} = \sqrt{13^3}$$

Como $|z^3| = |z|^3$, temos que $|z| = \sqrt{13}$. O módulo de z é $\sqrt{a^2 + \beta^2} = \sqrt{13} \Rightarrow a^2 + \beta^2 = 13$. Como são inteiros, os valores de a e β em módulo só podem ser permutações dos pares $(3, 2)$, ou seja, $a \in \{\pm 3, \pm 2\}$ e $\beta \in \{\pm 2, \pm 3\}$.

Testando essas combinações para que $z^3 = -9 + 46i$, encontramos que apenas $z = 3 + 2i$ satisfaz a equação.

Portanto:

$$a = 3 \text{ e } \beta = 2$$

**Questão 2**

Calcule as soluções reais da equação

$$x^4 + (2x + 7)^3 + 14x^3 + \frac{147}{2}x^2 + \frac{7^3}{2}x = -\frac{7^4}{16}.$$

Gabarito

A equação pode ser resolvida fatorando parte da expressão como a quarta potência do binômio $\left(x + \frac{7}{2}\right)$.

Etapla 1. Construa o binômio

Vamos olhar para o desenvolvimento de $\left(x + \frac{7}{2}\right)^4$:

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot \frac{7}{2} + 6x^2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4x \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^3 + \left(\frac{7}{2}\right)^4$$

Assim:

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^4 = x^4 + 14x^3 + \frac{147}{2}x^2 + \frac{7^3}{2}x + \frac{7^4}{16}$$

Etapla 2. Substitua na equação original

No enunciado, passando o termo constante para o lado esquerdo, veja que o pedido é equivalente a:

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^4 + (2x + 7)^3 = 0$$

Multiplicando e dividindo o primeiro termo para aparecer $(2x + 7)^4$:

$$\frac{(2x + 7)^4}{16} + (2x + 7)^3 = 0$$

Fatorando o termo comum $(2x + 7)^3$:

$$(2x + 7)^3 \left[\frac{2x + 7}{16} + 1 \right] = 0$$

Etapla 3. Determine as raízes

Para que o produto seja nulo, devemos ter:

$$2x + 7 = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{2x + 7}{16} + 1 = 0$$

Da primeira equação, obtemos raiz tripla $x = -7/2$. Da segunda, obtemos $2x + 7 = -16 \Rightarrow x = -23/2$. Assim, o conjunto das soluções reais é:

$$S = \left\{ -\frac{7}{2}, -\frac{23}{2} \right\}$$



Questão 3

Considere a função $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x^n}$$

e $a \in [0, 1)$, $a \neq \frac{1}{9}$. Dentre todas as retas secantes ao gráfico da função f nos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, $x \neq a$, a que tem o menor coeficiente angular é aquela que é paralela à reta de equação $ky - 4x = 2026$. Determine o valor de k em função de a .

Gabarito

O coeficiente angular da secante é calculado a partir da expressão da função $f(x)$, que pode ser simplificada usando a soma de uma progressão geométrica infinita.

Etapa 1. Simplifique a função e calcule o coeficiente angular

Pela soma de PG infinita de razão $\sqrt{x}$, temos que:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3} + \dots = \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

A reta que passa por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ possui coeficiente angular m dado por:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}}{a - x} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{a})(1 - \sqrt{x})}}{a - x} \\ &= \frac{1}{(1 - \sqrt{a})(1 - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

Etapa 2. Minimize o coeficiente angular

Para minimizar o coeficiente angular, devemos maximizar o denominador. O primeiro fator é constante e os outros dois formam uma função do segundo grau em $\sqrt{x}$:

$$(1 - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x}) = -(\sqrt{x})^2 + (1 - \sqrt{a})\sqrt{x} + \sqrt{a}$$

Calculando o vértice, temos:

$$x_v = \frac{1 - \sqrt{a}}{2}, \quad y_v = \frac{a + 2\sqrt{a} + 1}{4} = \frac{(1 + \sqrt{a})^2}{4}$$

Etapa 3. Determine k

Portanto, como o coeficiente angular de $ky - 4x = 2026$ é $4/k$, devemos ter a igualdade para o valor mínimo obtido com y_v :

$$\begin{aligned} m_{\min} &= \frac{1}{(1 - \sqrt{a}) \cdot \frac{(1 + \sqrt{a})^2}{4}} = \frac{4}{k} \\ k &= (1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})^2 \\ &= (1 - a)(1 + \sqrt{a}) \\ &= \sqrt{a} - a + 1 - a\sqrt{a} \end{aligned}$$

Logo, o valor de k é:

$$k = (1 - a)(1 + \sqrt{a})$$

Observação: note que o x que minimiza o coeficiente angular satisfaz $\sqrt{x} = x_v$. Ou seja:

$$\sqrt{x} = \frac{1 - \sqrt{a}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 - 2\sqrt{a} + a}{4}$$

Como devemos ter $x \neq a$, temos a condição:

$$\frac{1 - 2\sqrt{a} + a}{4} = a \Rightarrow 3a + 2\sqrt{a} - 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{a} + 1)(3\sqrt{a} - 1) = 0$$

Como $\sqrt{a} + 1 > 0$, temos que $3\sqrt{a} - 1 = 0 \Rightarrow a = 1/9$. Por isso essa restrição aparece no enunciado.

Questão 4

Seja i tal que $i^2 = -1$. Determine os valores do complexo z que satisfazem a equação

$$i \left(\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} + \frac{z^2 + (\bar{z})^2}{z^2 - (\bar{z})^2} \right) - \left(\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} \right) \left(\frac{z^2 + (\bar{z})^2}{z^2 - (\bar{z})^2} \right) = 1$$

em que $\bar{z}$ representa o conjugado de z .

Gabarito

O problema pode ser resolvido expressando o número complexo z em sua forma algébrica ou na sua forma trigonométrica e desenvolvendo a equação dada. Apresentamos duas resoluções.

Etapa 1. Solução 1: Utilizando a forma algébrica

Seja $z = a + bi$. Substituindo na expressão, note que:

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z - \bar{z} = 2bi$$

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2)$$

$$z^2 - \bar{z}^2 = 2(2abi)$$

Assim, substituindo essas identidades, a equação do enunciado torna-se:

$$i \left(\frac{2a}{2bi} + \frac{2(a^2 - b^2)}{2(2abi)} \right) - \left(\frac{2a}{2bi} \right) \left(\frac{2(a^2 - b^2)}{2(2abi)} \right) = 1$$

Simplificando os termos:

$$i \left(\frac{a}{bi} + \frac{a^2 - b^2}{2abi} \right) - \left(\frac{a}{bi} \right) \left(\frac{a^2 - b^2}{2abi} \right) = 1$$

Lembrando que $1/i = -i$, podemos reescrever e agrupar:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a^2 - b^2}{2ab} \right) + \frac{a^3 - ab^2}{2ab^2} = 1$$

Igualando os denominadores para $2ab^2$:

$$\frac{2a^2b + a^2b - b^3 + a^3 - ab^2}{2ab^2} = 1$$

$$a^3 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 = 0$$

Fatorando a expressão:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 3ab(a - b) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + 4ab + b^2) = 0$$

Logo, temos duas possibilidades:

$$a = b \quad \text{ou} \quad a^2 + 4ab + b^2 = 0$$

Da segunda, usando a fórmula de Bhaskara para encontrar b em função de a :

$$b = a(-2 \pm \sqrt{3})$$

Assim, os complexos $z = a + bi$ que satisfazem a equação são:

$$\begin{cases} z = a(1 + i) \\ z = a(1 + (\sqrt{3} - 2)i) \\ z = a(1 + (-\sqrt{3} - 2)i) \end{cases}$$

Onde a é um número real não nulo.

Etapa 2. Solução 2: Utilizando a forma trigonométrica

Seja $z = k \cdot \text{cis}(\theta)$. Note que:

$$z + \bar{z} = 2k \cos(\theta)$$

$$z - \bar{z} = 2k \sin(\theta) \cdot i$$

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2k^2 \cos(2\theta)$$

$$z^2 - \bar{z}^2 = 2k^2 \sin(2\theta) \cdot i$$

Substituindo essas identidades e agrupando as razões trigonométricas em cotangentes, a equação do enunciado torna-se:

$$\text{ctg}(\theta) + \text{ctg}(2\theta) + \text{ctg}(\theta) \cdot \text{ctg}(2\theta) = 1$$

Lembrando da fórmula de adição de arcos para cotangente:

$$\text{ctg}(x + y) = \frac{\text{ctg}(x) \cdot \text{ctg}(y) - 1}{\text{ctg}(x) + \text{ctg}(y)}$$

Temos que:

$$\text{ctg}(3\theta) = \frac{\text{ctg}(\theta) \cdot \text{ctg}(2\theta) - 1}{\text{ctg}(\theta) + \text{ctg}(2\theta)}$$

Da equação obtida, $\text{ctg}(\theta) + \text{ctg}(2\theta) = 1 - \text{ctg}(\theta) \cdot \text{ctg}(2\theta)$. Portanto:

$$\text{ctg}(3\theta) = -1$$

Logo, no primeiro ciclo trigonométrico:

$$3\theta \in \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}, \frac{23\pi}{4} \right\}$$

Dividindo por 3, encontramos os ângulos possíveis. As tangentes desses ângulos correspondem aos coeficientes que multiplicam a parte imaginária. Assim:

$$\begin{cases} z = a(1 + i) \\ z = a(1 + (\sqrt{3} - 2)i) \\ z = a(1 + (-\sqrt{3} - 2)i) \end{cases}$$

Onde a é um número real não nulo.

Questão 5

Sejam a , b e c números reais positivos. Prove que

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Gabarito

A desigualdade pode ser demonstrada utilizando desigualdades clássicas, como a desigualdade das médias (MA-MG) ou a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Apresentamos três formas de resolução.

Etapla 1. Solução 1: Utilizando MA-MG para três termos

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica para os três termos (a, b, c) e $(1/a, 1/b, 1/c)$, temos:

$$(a + b + c) \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

Como todos os termos são positivos, podemos multiplicar as duas desigualdades membro a membro:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt[3]{abc \cdot \frac{1}{abc}}$$

Logo:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Etapla 2. Solução 2: Utilizando MA-MG para dois termos

Abrindo o produto da desigualdade pedida, temos:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 3$$

Pela desigualdade das médias para dois termos, para cada par inverso:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 2$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 2$$

Somando as três desigualdades e adicionando 3 a ambos os lados, obtemos:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 3 \geq 2 + 2 + 2 + 3 = 9$$

O que conclui a demonstração.

Etapla 3. Solução 3: Utilizando Cauchy-Schwarz

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$, temos:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \left(\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

Simplificando os produtos dentro dos parênteses:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (1 + 1 + 1)^2$$

Logo:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

**Questão 6**

Seja $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2027}$ uma sequência de números reais tal que $a_1 = 1$, $a_4 = 10$ e que o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z = a_j \\ x + 3y + z = a_{j+1} \\ x + 4y + z = a_{j+2} \end{cases}$$

é possível para cada $j = 1, \dots, 2025$. Calcule $\sum_{j=1}^{2025} (x_j + y_j + z_j)$, em que (x_j, y_j, z_j) representa uma solução do sistema para cada $j = 1, \dots, 2025$.

Gabarito

A solução do problema se dá pela obtenção de uma relação entre as coordenadas da solução do sistema, percebendo que a sequência dada forma uma progressão aritmética.

Etapa 1. Calcule a diferença entre as equações

Fazendo a diferença entre as equações do sistema, temos que, subtraindo a equação (1) da (2):

$$y = a_{j+1} - a_j$$

E subtraindo a equação (2) da (3):

$$y = a_{j+2} - a_{j+1}$$

Assim, a diferença entre os termos consecutivos é constante, portanto a sequência é uma progressão aritmética de razão $r = y$. Daí:

$$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow 10 = 1 + 3y \Rightarrow y = 3$$

Com isso, $y_j = 3$ para todo j . Substituindo na primeira equação, $x_j + 6 + z_j = a_j \Rightarrow x_j + z_j = a_j - 6$.

Etapa 2. Calcule a soma pedida

Assim, a soma para um índice j é:

$$x_j + y_j + z_j = (a_j - 6) + 3 = a_j - 3$$

Portanto, separando o somatório:

$$\sum_{j=1}^{2025} (x_j + y_j + z_j) = \sum_{j=1}^{2025} (a_j - 3) = \left(\sum_{j=1}^{2025} a_j \right) - 3 \cdot 2025$$

Pela fórmula do termo geral da PA, calculamos a_{2025} :

$$a_{2025} = a_1 + 2024 \cdot r = 1 + 2024 \cdot 3 = 6073$$

Logo, calculando o somatório pela fórmula da soma da PA, obtemos:

$$\frac{(a_1 + a_{2025}) \cdot 2025}{2} - 6075 = \frac{(1 + 6073) \cdot 2025}{2} - 6075$$

Efetuando a conta:

$$3037 \cdot 2025 - 6075 = 6149925 - 6075 = 6143850$$

Assim, o somatório pedido é:

6143850



Questão 7

A probabilidade de um computador estar infectado por um vírus é de 90%. Um programa antivírus detecta a presença de vírus em um computador infectado com probabilidade de 95%, mas indica a presença de vírus quando o computador não está infectado com probabilidade de 1%. O programa analisou um dado computador e respondeu que o mesmo não está infectado. Qual é a probabilidade do computador examinado estar infectado?

Gabarito

A probabilidade pedida pode ser calculada pelo Teorema de Bayes, avaliando os casos em que o antivírus responde negativamente para a presença de vírus.

Etapa 1. Analise as probabilidades de indicação negativa

Existem duas situações em que o programa responde que o computador não está infectado:

1. O computador **está infectado**, mas o programa indica que **não está**. Como a detecção ocorre com 95% de chance, a falha ocorre com 5% de chance. Logo, a probabilidade é:

$$P_1 = \frac{90}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{450}{10000}$$

2. O computador **não está infectado** e o programa indica corretamente que **não está**. Como há 1% de chance de falso positivo, a chance de indicação correta para os 10% não infectados é de 99%. Logo, a probabilidade é:

$$P_2 = \frac{10}{100} \cdot \frac{99}{100} = \frac{990}{10000}$$

Etapa 2. Calcule a probabilidade condicional

A probabilidade do computador estar de fato infectado, dado que o exame indicou que não está, é a razão entre o caso 1 (falso negativo) e o total de resultados negativos:

$$p = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{450}{450 + 990} = \frac{450}{1440}$$

Simplificando a fração por 90:

$$p = \boxed{\frac{5}{16}}$$

Questão 8

Prove que o sistema admite uma única solução real e calcule essa solução.

$$\begin{cases} x + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y \\ y + \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = z \\ z + \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) = x \end{cases}$$

Gabarito

A solução do sistema pode ser analisada pelo comportamento da função logarítmica para valores positivos e negativos de x , dividindo o raciocínio em dois casos.

Etapa 1. Caso $x \geq 0$

Suponha $x \geq 0$. Então, observe que:

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0 + 1 = 1$$

De modo que $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq 0$. Dessa forma, pela primeira equação, temos que $y \geq x \geq 0$. Logo, também temos que $\log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \geq 0$ e, analogamente, a segunda equação nos dá $z \geq y \geq 0$.

Da mesma forma, teremos $\log(z + \sqrt{z^2 + 1}) \geq 0$ e a terceira equação nos dá $x \geq z$. Logo, pelas três desigualdades combinadas, temos $x \geq z \geq y \geq x$, de onde se conclui que $x = y = z$.

Temos então que:

$$\begin{aligned}\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= 0 \\ x + \sqrt{x^2 + 1} &= 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} &= 1 - x\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= (1 - x)^2 \\ x^2 + 1 &= 1 - 2x + x^2 \\ 2x &= 0 \Rightarrow x = 0\end{aligned}$$

Logo, obtemos a solução $x = y = z = 0$.

Etapa 2. Caso $x \leq 0$

Se $x \leq 0$, temos que:

$$\begin{aligned}x &\leq 0 \\ -2x &\geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 &\geq x^2 + 1 \\ (1 - x)^2 &\geq x^2 + 1\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada (lembrando que $1 - x > 0$):

$$\begin{aligned}1 - x &\geq \sqrt{x^2 + 1} \\ x + \sqrt{x^2 + 1} &\leq 1\end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo:

$$\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq 0$$

Pelo mesmo raciocínio de antes, a primeira equação nos dá $x \geq y$. Logo, $y \leq 0$ e também temos que $\log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \leq 0$. A segunda equação nos dá $z \leq y$. Logo, $z \leq 0$ e então $\log(z + \sqrt{z^2 + 1}) \leq 0$. A terceira equação, por sua vez, nos dá $z \geq x$.

Portanto, $x \geq y \geq z \geq x$, de onde $x = y = z$, e analogamente ao primeiro caso, obtemos $x = y = z = 0$.

Como ambos os casos levam à mesma conclusão, a única solução real do sistema é:

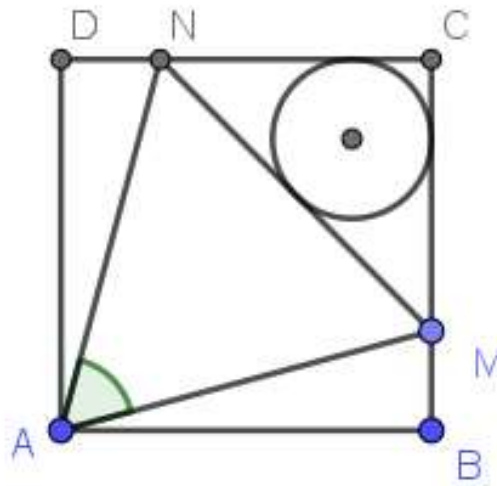
$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Questão 9

No quadrado $ABCD$ de lado a , são dados os pontos M sobre o lado BC e N sobre o lado CD de forma que AMN seja um triângulo equilátero. Calcule, em função de a , o raio do círculo inscrito no triângulo CMN .

Gabarito

O raio do círculo inscrito no triângulo retângulo CMN pode ser encontrado a partir das medidas dos seus lados, relacionando-os com o lado do quadrado.



Etapla 1. Calcule os lados do triângulo

Como $ABCD$ é um quadrado e AMN é um triângulo equilátero, temos que $AB = AD$ e $AM = AN$. Portanto, os triângulos retângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ADN$ são congruentes (caso especial para triângulos retângulos: hipotenusa e cateto). Daí, $\angle MAB = \angle DAN$. Sabendo que $\angle MAN = 60^\circ$ (triângulo equilátero) e $\angle BAD = 90^\circ$:

$$\begin{aligned}\angle DAN + \angle MAB + 60^\circ &= 90^\circ \\ 2\angle DAN &= 30^\circ \\ \angle DAN &= 15^\circ\end{aligned}$$

No triângulo $\triangle ADN$, podemos calcular a medida de DN :

$$DN = a \tan(15^\circ) = a(2 - \sqrt{3})$$

Com isso, a medida de NC é:

$$NC = a - DN = a - a(2 - \sqrt{3}) = a(\sqrt{3} - 1)$$

Como $\triangle NCM$ é um triângulo retângulo e isósceles (pois $\triangle ABM \cong \triangle ADN \Rightarrow BM = DN \Rightarrow CM = CN$), a hipotenusa é $NM = NC\sqrt{2}$.

Etapla 2. Calcule o raio do círculo inscrito

Para um triângulo retângulo, o raio do círculo inscrito r é dado pelo semiperímetro menos a hipotenusa. Sendo p_{NCM} o semiperímetro:

$$\begin{aligned}r &= p_{NCM} - NM \\ &= \frac{NC + MC + NM}{2} - NM \\ &= \frac{NC + MC - NM}{2}\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados:

$$\begin{aligned}r &= \frac{2a(\sqrt{3} - 1) - a\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2} \\ &= a(\sqrt{3} - 1) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= a \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

Escrevendo com denominador comum:

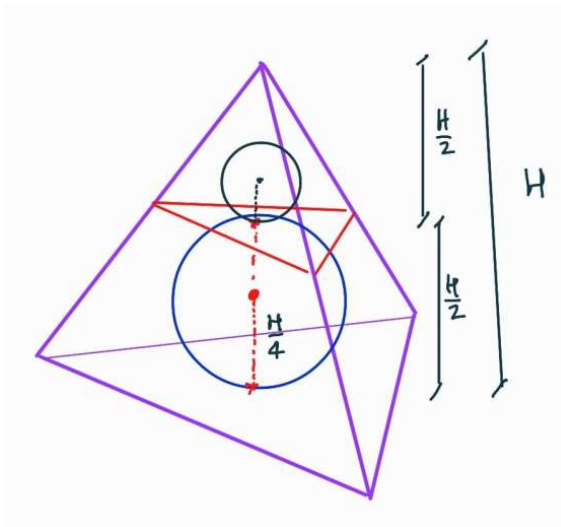
$$r = \frac{a(2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$$

Questão 10

Seja o tetraedro regular $ABCD$ de aresta a e a esfera inscrita no mesmo. Considerando cada vértice, traça-se um plano distinto da base oposta, paralelo a esta base e tangente à esfera. Um novo tetraedro é então formado a partir do vértice A e dos novos vértices definidos pela interseção do novo plano traçado, paralelo à base BCD , com o tetraedro $ABCD$. Analogamente faz-se o mesmo processo para os vértices B , C e D . Em seguida, inscreve-se uma esfera em cada novo tetraedro criado. Repete-se o processo de forma indefinida. Calcule em função de a o volume ocupado por todas as esferas interiores ao tetraedro $ABCD$.

Gabarito

O problema envolve calcular o volume da esfera original e somá-lo aos volumes das esferas subsequentes, cujas proporções seguem uma progressão geométrica.



Etapa 1. Analise a proporção geométrica

Note que, no tetraedro regular de altura H , o centro da esfera inscrita dista $H/4$ da base. Logo, a distância do centro até o vértice oposto é $3H/4$.

Quando o plano tangente é traçado paralelamente à base, a distância desse plano ao vértice é $H - 2 \cdot (H/4) = H/2$. Assim, o novo tetraedro formado tem altura $H/2$, ou seja, metade da altura do original.

Sendo a razão de semelhança igual a $1/2$, o raio da próxima esfera inscrita será:

$$R_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{H}{2} = \frac{H}{8}$$

Logo, os raios formam uma PG de razão $1/2$. Como o volume depende do cubo do raio, a cada geração o volume de uma esfera é multiplicado por $(1/2)^3 = 1/8$.

Etapa 2. Calcule a soma dos volumes

Na primeira geração (esfera original), há apenas 1 esfera de volume V_0 . Na segunda geração, como o processo é feito para cada um dos 4 vértices, há 4 esferas. Na terceira geração haverá 16, e assim por diante. Na geração n , haverá 4^{n-1} esferas. A soma total de todos os volumes de todas as esferas será:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \cdot V_0 \cdot \frac{1}{8^{n-1}} \\ &= V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{8}\right)^{n-1} \\ &= V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Aplicando a soma da PG infinita de razão $1/2$:

$$V = \frac{V_0}{1 - \frac{1}{2}} = 2V_0$$

Sabendo que o raio da esfera inicial é $R_0 = H/4$:



$$\begin{aligned}V &= 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{H}{4}\right)^3 \\&= \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{H^3}{64} \\&= \frac{\pi H^3}{24}\end{aligned}$$

Etapla 3. Substitua a altura do tetraedro

A altura do tetraedro regular em função da aresta a é $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Substituindo esse valor:

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{24} \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 \\&= \frac{\pi}{24} \cdot \frac{a^3 \cdot 6\sqrt{6}}{27} \\&= \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{108}\end{aligned}$$

Logo, o volume total ocupado pelas esferas é:

$$V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{108}$$