

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Sejam n e m números naturais. Sabe-se que n vale 5621 na base numérica m e 1208 na base numérica $m + 5$. O valor de n é:

A () 2020

B () 2022

C () 2024

D () 2026

E () 2028

Gabarito: C

Pelo enunciado:

$$n = 5m^3 + 6m^2 + 2m + 1 = (m + 5)^3 + 2(m + 5)^2 + 8$$

Daí:

$$5m^3 + 6m^2 + 2m + 1 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125 + 2m^2 + 20m + 50 + 8$$

Assim, chegamos no polinômio:

$$4m^3 - 11m^2 - 93m - 182 = 0$$

Agora precisamos chutar raiz, porém, sabemos que m precisa ser maior que 6, logo vamos chutar 7 que de fato é raiz:

$$4 \cdot 7^3 - 11 \cdot 7^2 - 93 \cdot 7 - 182 = 0$$

Fatorando então:

$$4m^3 - 11m^2 - 93m - 182 = (m - 7)(4m^2 + 17m + 26)$$

Veja que o segundo grau não tem raiz real. Logo $m = 7$ e assim $n = 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 = \boxed{2024}$

Questão 2

Considere os conjuntos $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Quantas funções injetivas $f : X \rightarrow Y$ existem, tais que, para dois elementos previamente fixados x_i e $x_j \in X$, $|f(x_i) - f(x_j)| \neq 1$?

A () 4800

B () 5040

C () 5880

D () 6480

E () 6720

Gabarito: B

Vamos calcular os casos totais: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

Restrição:

- Escolha dos pares com módulo 1: $7 \cdot 2 = 14$
- Escolha dos outros elementos: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

$$14 \cdot 120 = 1680$$

Excluindo a restrição: $6720 - 1680 = \boxed{5040}$

**Questão 3**

O polinômio $P(x)$, de grau 3 e coeficientes reais, satisfaz a identidade $P(x) - P(x - 1) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e, além disso, $P(0) = 5$. O valor de $P(10)$ é:

A () 380**B** () 385**C** () 390**D** () 395**E** () 400**Gabarito: C**

Pelo enunciado:

$$\left. \begin{array}{l} P(1) - P(0) = 1^2 \\ P(2) - P(1) = 2^2 \\ P(3) - P(2) = 3^2 \\ \vdots \\ P(10) - P(9) = 10^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{somando}} P(10) - P(0) = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$$

Como $P(0) = 5$:

$$P(10) = 5 + 385 = \boxed{390}$$



Questão 4

Sejam $m \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{vmatrix} x^m & x^{m+2} & x^{m+4} \\ y^m & y^{m+2} & y^{m+4} \\ z^m & z^{m+2} & z^{m+4} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\right),$$

para quaisquer x, y e $z \in \mathbb{R}^*$. O valor de m é:

A () -6

B () -4

C () -2

D () 2

E () 4

Gabarito: B

$$\begin{vmatrix} x^m & x^{m+2} & x^{m+4} \\ y^m & y^{m+2} & y^{m+4} \\ z^m & z^{m+2} & z^{m+4} \end{vmatrix} = x^m y^m z^m \cdot \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & y^2 & y^4 \\ 1 & z^2 & z^4 \end{vmatrix}$$

Como $\det A = \det A^T$:

$$x^m y^m z^m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} = x^m y^m z^m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ (x^2)^2 & (y^2)^2 & (z^2)^2 \end{vmatrix}$$

Determinante de Matriz de Vandermonde:

$$x^m y^m z^m (z^2 - y^2)(z^2 - x^2)(y^2 - x^2)$$

Igualando:

$$\begin{aligned} x^m y^m z^m (z^2 - y^2)(z^2 - x^2)(y^2 - x^2) &= \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\right) \\ x^m y^m z^m \cdot z^2 y^2 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot z^2 x^2 \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot y^2 x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\right) &= \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\right) \\ x^{m+4} \cdot y^{m+4} \cdot z^{m+4} &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $m = -4$

Questão 5

Sabe-se que $i^2 = -1$. Seja $z = \frac{1-2i}{4-3i}$ e, para cada número natural n , $S_n = \sum_{k=1}^n (\bar{z})^k$, em que $\bar{z}$ representa o conjugado de z . O menor valor de n para o qual vale a desigualdade

$$\left| S_n - \frac{\bar{z} - |z|^2}{|1 - z|^2} \right| < \frac{1}{2027}$$

é:

A () 5

B () 8

C () 9

D () 10

E () 11

Gabarito: D

Achando z e $\bar{z}$:

$$z = \frac{1-2i}{4-3i} = \frac{(1-2i)(4+3i)}{16+9} = \frac{2-i}{5} \Rightarrow \bar{z} = \frac{2+i}{5}$$

S_n é soma de PG, então:

$$S_n = \frac{\bar{z}(1 - (\bar{z})^n)}{1 - \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} - \frac{(\bar{z})^{n+1}}{1 - \bar{z}}$$

Olhando para o outro termo do módulo pedido:

$$\frac{\bar{z} - |z|^2}{|1 - z|^2} = \frac{\bar{z} - z\bar{z}}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \bar{z} \frac{(1 - z)}{(1 - z)(z - \bar{z})} = \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}}$$

Juntando:

$$\left| S_n - \frac{\bar{z} - |z|^2}{|1 - z|^2} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} - \frac{(\bar{z})^{n+1}}{1 - \bar{z}} - \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} \right| = \left| -\frac{(\bar{z})^{n+1}}{1 - \bar{z}} \right| = \frac{|(\bar{z})^{n+1}|}{|1 - \bar{z}|}$$

Achando separadamente:

$$|(\bar{z})^{n+1}| = |\bar{z}|^{n+1} = \left(\sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} \right)^{n+1} = 5^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$|1 - \bar{z}| = \left| 1 - \frac{2+i}{5} \right| = \left| \frac{3-i}{5} \right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Então:

$$\left| S_n - \frac{\bar{z} - |z|^2}{|1 - z|^2} \right| = \frac{5^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 5^n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 5^n} < \frac{1}{2027} \Rightarrow 2027^2 < 2 \cdot 5^n \Rightarrow 5^n > 2054364,5$$

Testando:

$$5^9 = 1953125; 5^{10} = 9765625$$

Logo, o menor n que satisfaz a inequação é $n = 10$

Questão 6

Sabe-se que $i^2 = -1$. Seja S a região do Plano de Argand-Gauss definida por

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 - i| + |z - 3 - 4i| \leq 7\}.$$

Qual a área do retângulo circunscrito à região S que tem um dos lados paralelos à reta que passa pelos pontos $1 - i$ e $-2 + 3i$?

A () $\frac{21\sqrt{6}}{2}$

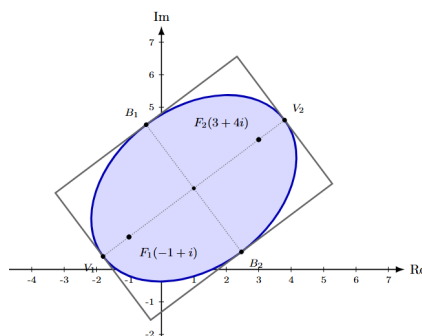
B () $12\sqrt{6}$

C () $15\sqrt{6}$

D () $14\sqrt{6}$

E () $\frac{35\sqrt{6}}{2}$

Gabarito: D



Veja que a região em questão é uma elipse preenchida, uma vez que temos a soma das distâncias de um ponto até outros dois fixos menor ou igual a uma constante. Além disso, temos que os focos da elipse são os pontos $(-1, 1)$ e $(3, 4)$. A distância entre eles é a distância focal ($2c$), e o valor da soma é o eixo maior ($2a$):

$$2a = 7$$

$$2c = |3 + 4i - (-1 + i)| = |4 + 3i| = 5$$

$$(2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2 \implies (2b)^2 = 7^2 - 5^2 = 24 \implies 2b = 2\sqrt{6}$$

O coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $(1, -1)$ e $(-2, 3)$ é:

$$m_1 = \frac{3 - (-1)}{-2 - 1} = -\frac{4}{3}$$

Já o coeficiente angular da reta que contém o eixo focal é:

$$m_2 = \frac{4 - 1}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$$

Como $m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = -1$, a reta r é perpendicular ao eixo maior da elipse e, portanto, paralela ao seu eixo menor. Assim, os lados do retângulo circunscrito são paralelos aos próprios eixos da elipse, medindo $2a$ e $2b$:

$$\text{Área} = 2a \cdot 2b = 7 \cdot 2\sqrt{6} = 14\sqrt{6}$$

Questão 7

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$, r_2 e r_3 as raízes da equação $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ e r_3 e r_1 as raízes da equação $a_3x^2 + b_3x + c_3 = 0$ com $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^*$ e $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$. Calcule:

$$\left[\prod_{i=1}^3 \left(\frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} \right) \right]^{1/2}$$

A () $r_1 + r_2 + r_3$

B () $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$

C () $(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)$

D () $r_1r_2r_3$

E () $(1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3)$

Gabarito: X

Sendo $P_i(x) = a_ix^2 + b_ix + c_i = a_i(x - r_j)(x - r_k)$

Veja que $P_i(-1) = a_i - b_i + c_i = a_i(-1 - r_j)(-1 - r_k) \Rightarrow \frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} = (1 + r_j)(1 + r_k)$.

Dessa forma,

$$\left[\prod_{i=1}^3 \left(\frac{a_i - b_i + c_i}{a_i} \right) \right]^{1/2} = \left[\prod_{i=1}^3 (1 + r_j)(1 + r_k) \right]^{1/2} =$$

$$= [(1 + r_2)(1 + r_3) \cdot (1 + r_1)(1 + r_3) \cdot (1 + r_1)(1 + r_2)]^{1/2} = |(1 + r_1)|(1 + r_2)|(1 + r_3)|$$

Como a resposta é em módulo, sugerimos a anulação da questão.

Questão 8

Seja a equação $9^x - 4 \cdot 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{2x-1}$. O seu conjunto solução contém:

- A () nenhum elemento.
 B () um número real positivo e mais nenhum outro elemento.
 C () um número real negativo e mais nenhum outro elemento.
 D () um número real negativo, um número real positivo e mais nenhum outro elemento.
 E () dois números reais positivos e mais nenhum outro elemento.

Gabarito: B

Veja que: $3^{2x-1} = \frac{3^{2x}}{3} = \frac{9^x}{3}$.

Dessa forma:

$$9^x - 4 \cdot 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{2x-1} \Rightarrow 9^x + 2 \cdot \frac{9^x}{3} = 5^{x+\frac{1}{2}} + 4 \cdot 5^{x-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 9^x \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 5^x \left(5^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5^{\frac{1}{2}}}\right) \Rightarrow \frac{5}{3} \cdot 9^x = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot 5^x$$

Ou seja:

$$\frac{9^x}{5^x} = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = \frac{27}{5\sqrt{5}}$$

Reescrevendo o lado direito como potência de base $\frac{9}{5}$:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = \left(\frac{9}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \boxed{\frac{3}{2}} \text{ é a única raiz da equação}$$

Questão 9

Seja n o número de polinômios de grau 4 que têm coeficientes inteiros, coeficiente do termo de maior grau igual a 1 e cujas raízes também são raízes do polinômio $P(x) = x^{12} - 1$. O resto da divisão de n por 5 é:

- A () 0 B () 1 C () 2 D () 3 E () 4

Gabarito: B

Primeiro vamos fatorar o polinômio ao máximo:

$$x^{12} - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

Note que são 2 raízes reais (1 e -1) e 10 não reais.

Primeiro vamos calcular o número de polinômios de grau 4 que funcionam sem raízes reais.

Chamaremos $P_1(x) = x^2 + 1$, $P_2(x) = x^2 + x + 1$, $P_3(x) = x^2 - x + 1$ e $P_4(x) = x^4 - x^2 + 1$

Daí temos 1 caso das raízes virem de P_4 , 3 casos vindo de P_1, P_2, P_3 , sendo 1 de cada sendo raízes duplas. E mais 3 casos pegando um fator de cada um dentre P_1, P_2 e P_3 . Assim temos 7 casos aqui.

Agora vamos calcular quantos funcionam com 4 raízes reais e isso vai dar 5 polinômios, pois basta variar a quantidade de vezes que 1 é raiz (0, 1, 2, 3, 4)

Por fim vamos calcular quantos funcionam com 2 raízes reais.

Temos 3 opções para definir se serão dois 1's, um 1 ou zero 1's. E temos mais 3 opções para definir qual fator vai entrar entre P_1, P_2 e P_3 . Logo há 9 polinômios que funcionam aqui.



Somando tudo da $7 + 5 + 9 = 21$ polinômios e portanto a resposta é **1**

Questão 10

Pedro propõe a Maria o seguinte desafio. Existem dez caixas fechadas, sendo que duas delas contêm uma moeda cada e as demais estão vazias. Pedro sabe onde estão as moedas, mas Maria não. Maria ganha um prêmio se encontrar as duas caixas com as moedas. Maria escolhe duas caixas ao acaso. Dentre as oito restantes, Pedro escolhe seis que ele sabe que estão vazias, mostra seu conteúdo a Maria, e as remove do desafio. Ele então oferece a Maria três opções: (1) continuar com as duas caixas originalmente escolhidas; (2) trocar uma das caixas por uma das que sobraram; ou (3) trocar as duas caixas pelas duas que sobraram. Seja $P(i)$ a probabilidade de Maria ganhar o prêmio se escolher a opção (i) . Temos que $P(1) + P(2) + P(3) = a/b$, onde a/b é uma fração irredutível. O valor de $a + b$ é:

A () 3**B () 26****C () 54****D () 76****E () 78****Gabarito: B**

(I) Probabilidade de Maria tirar duas vazias:

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{90}$$

(II) Probabilidade de Maria tirar uma vazia e uma moeda:

$$2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{90}$$

(III) Probabilidade de Maria tirar duas moedas:

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

Logo: $* P(1) = \frac{2}{90} \cdot 1 = \frac{2}{90}$ (só ganha se ocorrer III) $* P(2) = \frac{32}{90} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{90}$ (só ganha se ocorrer II) (O fator $\frac{1}{2}$ extra corresponde a trocar a caixa certa.) $* P(3) = \frac{56}{90} \cdot 1 = \frac{56}{90}$ (só ganha se ocorrer I)

Portanto:

$$P(1) + P(2) + P(3) = \frac{2 + 8 + 56}{90} = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}$$

Resposta: $11 + 15 = \mathbf{26}$

Questão 11

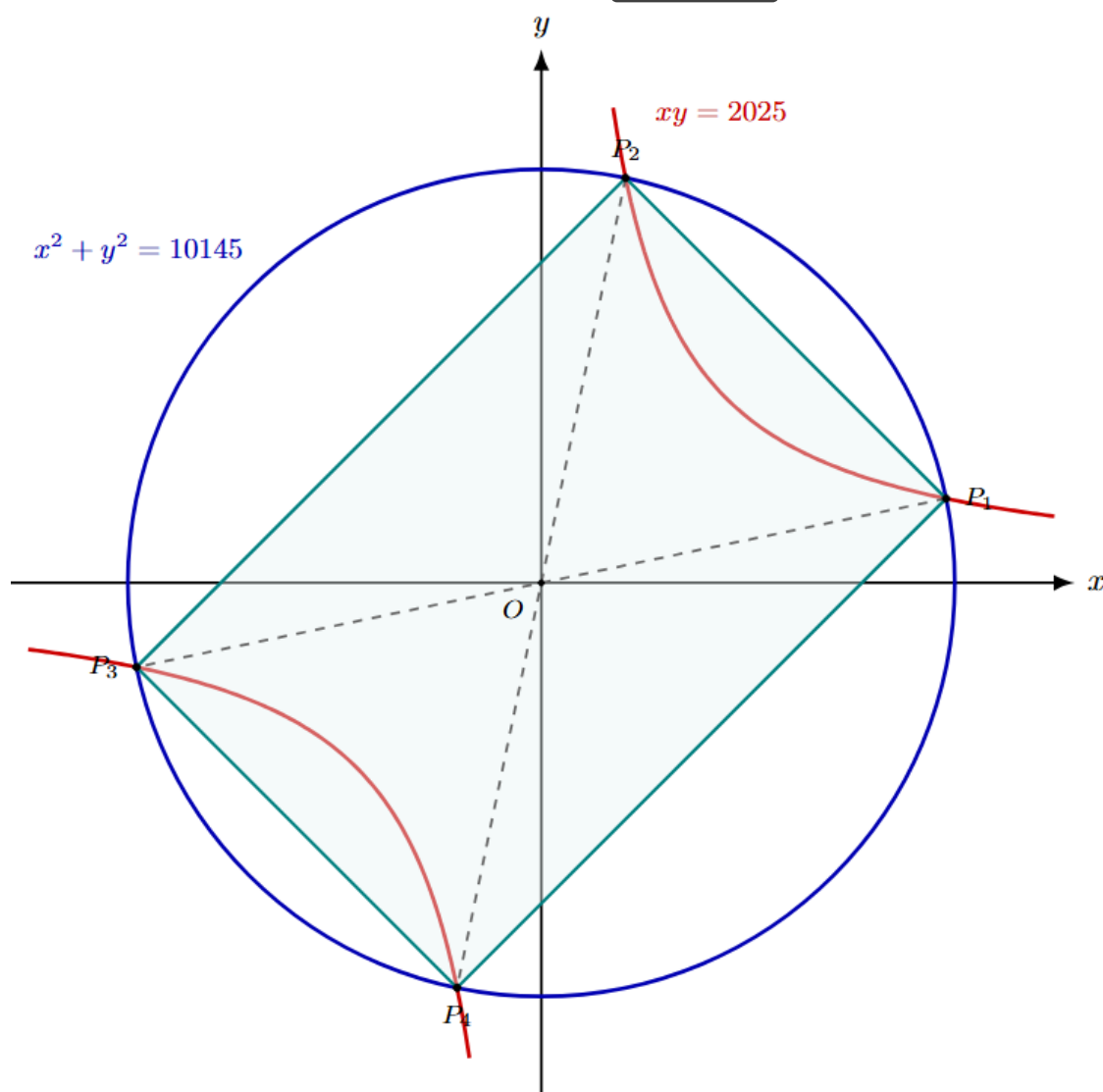
Seja o polígono formado pelos vértices (x, y) que satisfazem as equações

$$y = \frac{2025}{x} \quad \text{e} \quad y^2 = -x^2 + 10145$$

com x e $y \in \mathbb{R}^*$. Em relação ao polígono é correto afirmar que:

A () suas duas diagonais passam pela origem.**B ()** seus ângulos internos somam 180 graus.**C ()** seu círculo circunscrito tem raio inferior a 100.**D ()** ele possui um total de 5 diagonais.**E ()** ele inexistente, pois há apenas dois pontos (x, y) distintos.

Gabarito: A



A) **VERDADEIRO**, Por simetria, a figura é um retângulo e suas duas diagonais passam pela origem.

B) **ERRADO**, a figura é um retângulo.

C) **ERRADO**,

$$x^2 + y^2 = 10145 \implies R^2 > 10000 \implies R > 100$$

D) **ERRADO**, possui 2 diagonais.

E) **ERRADO**,

Para $y = \frac{2025}{x}$ (hipérbole) e a circunferência $x^2 + y^2 = 10145$:

$$\frac{2025^2}{x^2} + x^2 = 10145$$

$$x^4 - 10145x^2 + 2025^2 = 0$$

Analisando o discriminante para a equação quadrática em x^2 :

$$\Delta = 10145^2 - 4 \cdot 2025^2 > 0$$

Assim:

$$x^2 = \frac{10145 \pm \sqrt{10145^2 - 4 \cdot 2025^2}}{2}$$

Como $\sqrt{\Delta} < 10145$, ambos os valores de x^2 são reais e positivos ($x^2 > 0$).

Logo, cada valor de x^2 fornece dois valores reais para x , resultando em 4 valores reais distintos para x e gerando **4 pontos distintos** de interseção.

**Questão 12**

Considere a equação

$$|\sin(x) - \cos(x)| + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x)} = \sqrt{3},$$

com $x \in (0, 6\pi)$ e $x \notin \left\{\frac{m\pi}{2} / m \in \mathbb{Z}\right\}$. O número de soluções dessa equação é:

A () 0

B () 2

C () 4

D () 6

E () 8

Gabarito: A

Dada a equação trigonométrica:

$$|\sin x - \cos x| + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x} = \sqrt{3}$$

Desenvolvendo o termo dentro da raiz quadrada (lembrando que $2 = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x$):

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x} = |\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x|$$

Passando para senos e cossenos:

$$= \left| \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right| = \left| \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \right| = \left| \frac{2}{2 \sin x \cdot \cos x} \right| = \left| \frac{2}{\sin 2x} \right|$$

Substituindo este resultado de volta na equação original:

$$|\sin x - \cos x| + \left| \frac{2}{\sin 2x} \right| = \sqrt{3}$$

Analisando os limites mínimos de cada parcela: $* |\sin x - \cos x| \geq 0$ $* \left| \frac{2}{\sin 2x} \right| \geq 2$

Desta forma:

$$|\sin x - \cos x| + \left| \frac{2}{\sin 2x} \right| \geq 2 > \sqrt{3}$$

Como o primeiro membro é no mínimo 2 e o segundo membro é $\sqrt{3}$, a igualdade é impossível. Logo, **NÃO HÁ SOLUÇÃO!**

Questão 13

Considere a equação

$$\log_{(0,5 \cos(4x) + 0,5)}(0,5 \cdot \sin(4x)) = 1.$$

O número de valores de x , pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$, que satisfazem essa equação é:

A () 0

B () 2

C () 3

D () 4

E () 6

Gabarito: B

Dada a equação logarítmica:

$$\log_{(0,5 \cdot \cos(4x) + 0,5)}(0,5 \cdot \sin(4x)) = 1 \Rightarrow 0,5 \cdot \cos(4x) + 0,5 = 0,5 \cdot \sin(4x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(4x) + 1 = \sin(4x) \Rightarrow 1 = \sin(4x) - \cos(4x)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(4x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(4x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(4x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Isso nos dá duas possibilidades gerais, com $K \in \mathbb{Z}$:

Caso 1:

$$4x - 45^\circ = 45^\circ + 360^\circ K \implies x = 22,5^\circ + 90^\circ K$$

Caso 2:

$$4x - 45^\circ = 135^\circ + 360^\circ K \implies x = 45^\circ + 90^\circ K$$

Com $x \in [0, \pi]$, temos os seguintes candidatos:

$$x \in \{22,5^\circ; 112,5^\circ; 45^\circ; 135^\circ\}$$

****Condições de Existência (C.E.):**

i) Base positiva:

$$0,5 \cdot \cos(4x) + 0,5 > 0 \implies \cos(4x) > -1$$

$$x \neq 45^\circ \text{ e } x \neq 135^\circ$$

ii) Base diferente de 1:

$$0,5 \cdot \cos(4x) + 0,5 \neq 1 \implies \cos(4x) \neq 1$$

iii) Logaritmando positivo:

$$0,5 \cdot \sin(4x) > 0 \implies \sin(4x) > 0$$

(NÃO INTERFERE nos valores $22,5^\circ$ e $112,5^\circ$)

Logo, **HÁ DUAS SOLUÇÕES** ($22,5^\circ$ e $112,5^\circ$)

Questão 14

Seja C_1 o círculo inscrito em um quadrado $ABCD$ de lado 2, e seja O o centro de C_1 . Considere uma reta L passando pelo vértice A do quadrado. Um círculo variável, de centro M , tangencia externamente o círculo C_1 e também é tangente à reta L , de forma que M e O estejam no mesmo semiplano definido pela reta L . O lugar geométrico do ponto M é:

A () uma elipse de focos em A e O .

B () um ramo de hipérbole de centro em O .

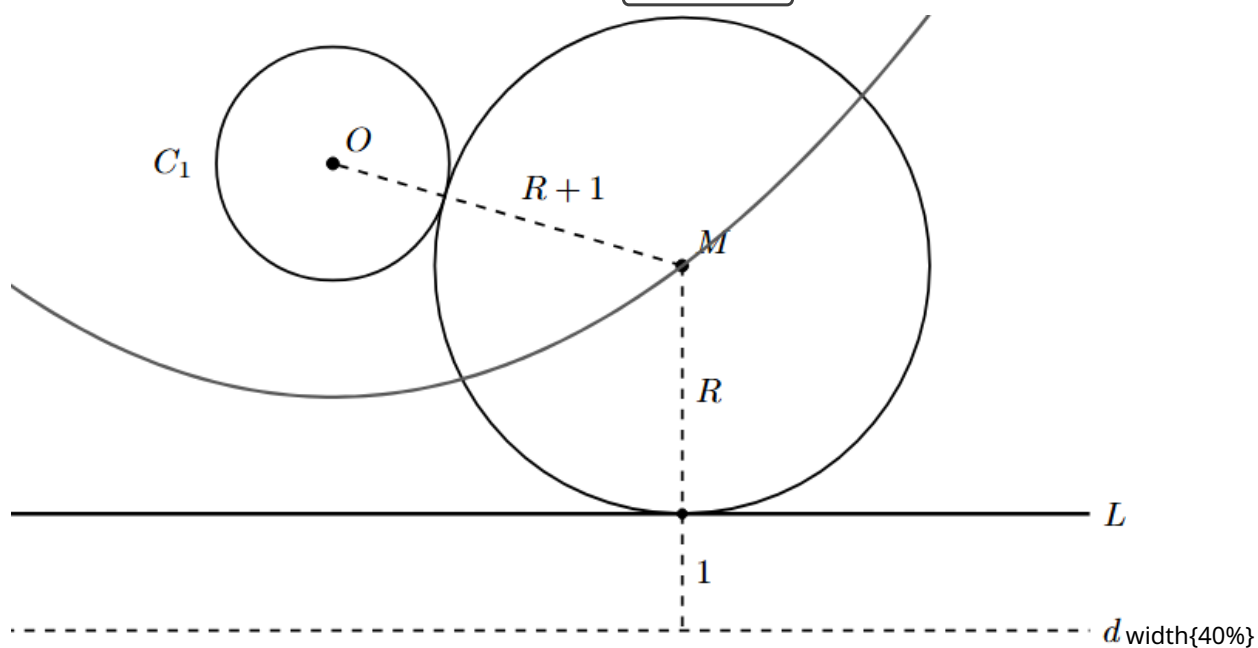
C () uma parábola com foco em O .

D () uma circunferência concêntrica a C_1 .

E () duas retas paralelas à reta L .



Gabarito: C



Seja R o raio da circunferência variável (λ) e M o seu centro.

Como λ tangencia a circunferência C_1 exteriormente:

$$MO = R + 1$$

Como λ tangencia a reta L :

$$\text{dist}(M, L) = R$$

Considere uma reta d paralela a L e distando 1 de L (no semiplano oposto a O). Portanto:

$$\text{dist}(M, d) = R + 1$$

Assim:

$$MO = \text{dist}(M, d)$$

Ou seja, a distância do ponto M ao ponto fixo O é igual à distância de M à reta fixa d .

Logo, o lugar geométrico de M é uma **parábola** de foco O e diretriz d .

Questão 15

Em uma esfera de raio R inscreve-se um prisma regular reto de base hexagonal. Sabendo-se que a área lateral desse prisma é máxima, o seu valor em função de R é:

A () $\sqrt{6}R^2$

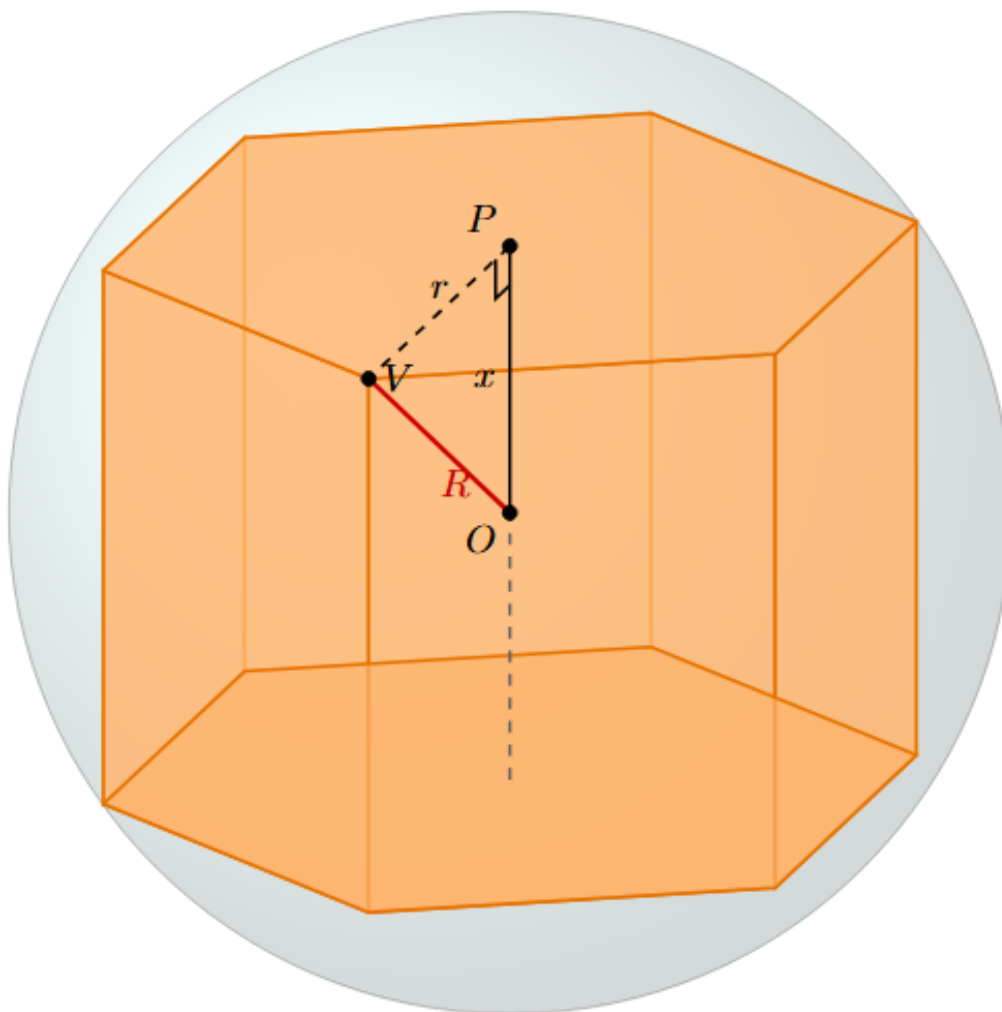
B () $3R^2$

C () $6R^2$

D () $2\sqrt{6}R^2$

E () $12R^2$

Gabarito: C



width{30%}

$$R^2 = x^2 + r^2 \implies r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Assim,

$$A_l = 6 \cdot 2x \cdot r = 12x\sqrt{R^2 - x^2}$$

Para maximizar AI , basta maximizar:

$$f(y) = y(R^2 - y)$$

O gráfico de $f(y)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo, com raízes em 0 e R^2 . Assim, o valor de y no vértice da parábola maximiza a função:

$$y = \frac{R^2}{2} \quad \text{maximiza } f$$

Logo, $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ maximiza $A/$

Portanto, substituindo para encontrar a área máxima[cite: 4]:

$$A_{I\text{máx}} = 12 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{12R}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{2}}$$

$$A I_{\text{máx}} = \frac{12R^2}{2} = \boxed{6R^2}$$

Equipe de Matemática

Lucas Herlin - Coordenador Arthur Amat Carol Cruz Jorge Craveiro Kaiki de Almeida Márcio Peixoto Rafael Filipe Rodrigo Villard

**GABARITO FÍSICA****Questão 16**

A posição (x, y) e a velocidade (v_x, v_y) do movimento de uma partícula no plano respeita as equações a seguir, onde t representa o instante de tempo:

$$\begin{aligned}x(t) &= 9v_y(t) \\ y(t) &= -4v_x(t)\end{aligned}$$

Admitindo todos os dados em unidades SI, pode-se concluir que a trajetória da partícula é uma curva fechada e que o tempo para percorrê-la uma vez é:

A () $\frac{1}{6}\pi$

B () $\frac{1}{3}\pi$

C () 3π

D () 6π

E () 12π

Gabarito: E

Derivando as relações dadas, conseguimos escrever as acelerações em função das posições, da seguinte forma:

$$v_x = 9a_y \Rightarrow a_y = -\frac{y}{36}$$

$$v_y = -4a_x \Rightarrow a_x = -\frac{x}{36}$$

Portanto, as duas coordenadas executam movimentos harmônicos simples com a mesma pulsação (basta reparar que a aceleração varia linearmente com a posição). Comparando com $a_x = -\omega^2 x$, temos:

$$\omega = \frac{1}{6} \text{ rad/s.}$$

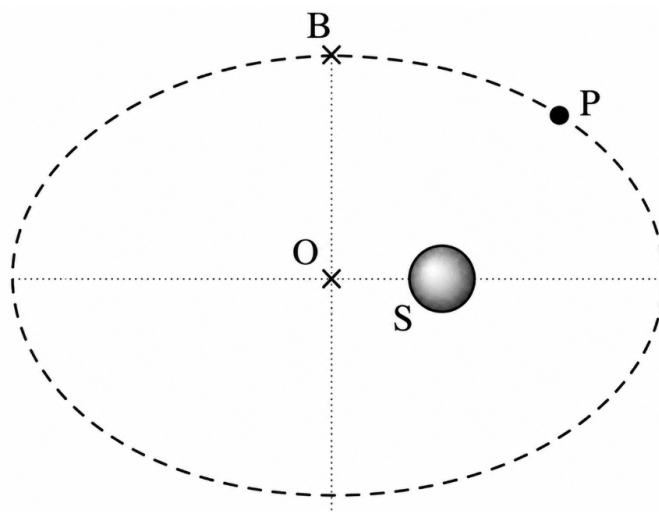
Uma volta completa corresponde ao período dos movimentos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 12\pi \text{ s}$$



Questão 17

Cientistas estudaram a órbita de um planeta distante P em torno de uma estrela S e concluíram que a razão entre as distâncias de S ao apoastro e de S ao periastro de P é de $9/4$.



Portanto, o valor que mais se aproxima da razão entre as energias potenciais gravitacionais de P no apoastro e no ponto B da órbita, mostrado na figura, é:

A () $\frac{5}{7}$

B () $\frac{5}{18}$

C () $\frac{13}{18}$

D () $\frac{2}{3}$

E () $\frac{4}{7}$

Gabarito: C

A energia potencial gravitacional é proporcional a $-1/r$. Assim, a razão entre as energias potenciais corresponde à razão inversa entre as respectivas distâncias à estrela.

Sejam r_a e r_p as distâncias da estrela ao apoastro e ao periastro, respectivamente, e a o semieixo maior da elipse. Pela geometria da órbita:

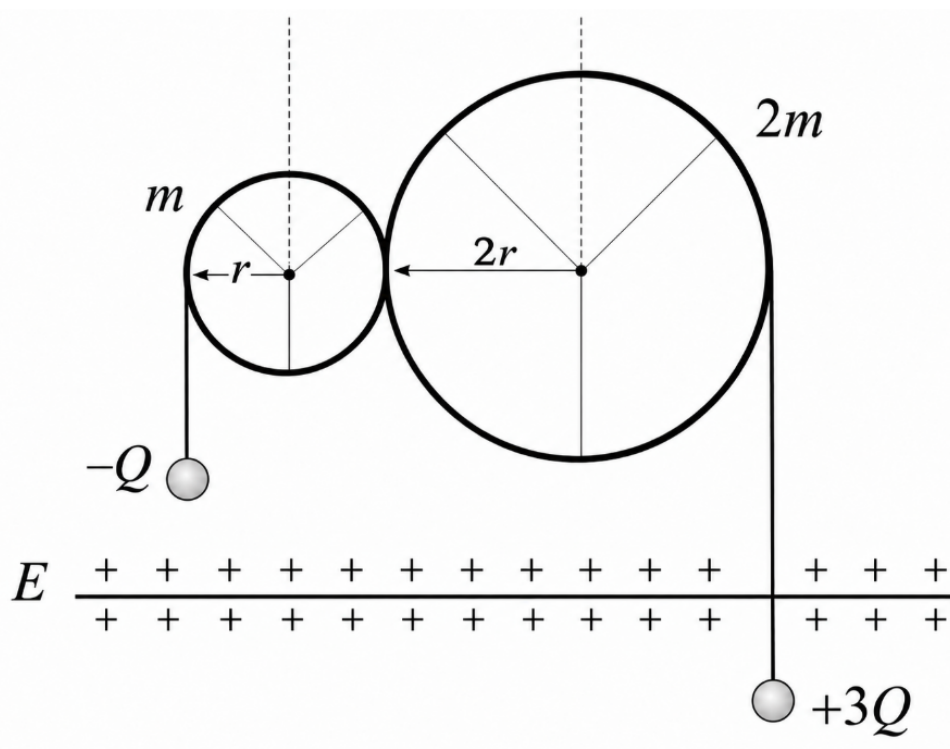
$$r_a + r_p = 2a, \quad \frac{r_a}{r_p} = \frac{9}{4}.$$

O ponto B pertence ao eixo menor. Nesse ponto, as distâncias aos dois focos são iguais e, como sua soma vale $2a$, a distância de B à estrela é a .

Logo:

$$\frac{U_a}{U_B} = \frac{a}{r_a} = \frac{r_a + r_p}{2r_a} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{9} \right) = \boxed{\frac{13}{18}}.$$

Questão 18



Conforme mostra a figura, duas roldanas em forma de anel, inicialmente em repouso, estão engrenadas e, ao iniciarem seus movimentos, cada fio é enrolado ou desenrolado à mesma velocidade escalar dos pontos do perímetro de sua respectiva roldana. Nas extremidades dos fios, existem partículas carregadas penduradas na vertical, ambas sujeitas a um campo elétrico gerado por um plano horizontal infinito uniformemente carregado, com um pequeno furo o suficiente para um dos fios passar.

Dados:

- massas das roldanas: m e $2m$;
- o raio de uma roldana é o dobro do raio da outra;
- módulo do campo elétrico vertical: E ;
- cargas das partículas eletrizadas: $-Q$ e $+3Q$.

Observações:

- as massas das partículas são desprezíveis;
- as massas das roldanas estão uniformemente distribuídas;
- as roldanas estão sustentadas por hastes presa ao teto nos respectivos centros;
- as roldanas giram sempre em torno de seus centros e sem atrito;
- o segmento que liga os dois centros das roldanas é paralelo ao plano carregado.

Ao ser iniciado o movimento das roldanas, pelo princípio da conservação da energia, a aceleração do fio que sustenta a carga positiva é:

A () $\frac{2}{7} \frac{EQ}{m}$

B () $\frac{4}{3} \frac{EQ}{m}$

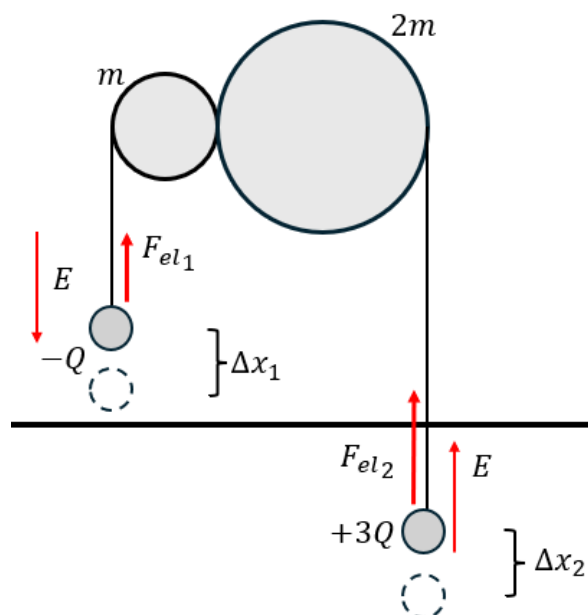
C () $\frac{8}{7} \frac{EQ}{m}$

D () $\frac{8}{3} \frac{EQ}{m}$

E () $\frac{2}{3} \frac{EQ}{m}$

Gabarito: B

Pelo vínculo geométrico, os deslocamentos das cargas são iguais:



$$\Delta x_1 = \Delta x_2$$

Após deslocar Δx , teremos o seguinte trabalho das forças externas:

$$W = EQ \cdot \Delta x + E \cdot 3Q \cdot \Delta x = 4EQ\Delta x$$

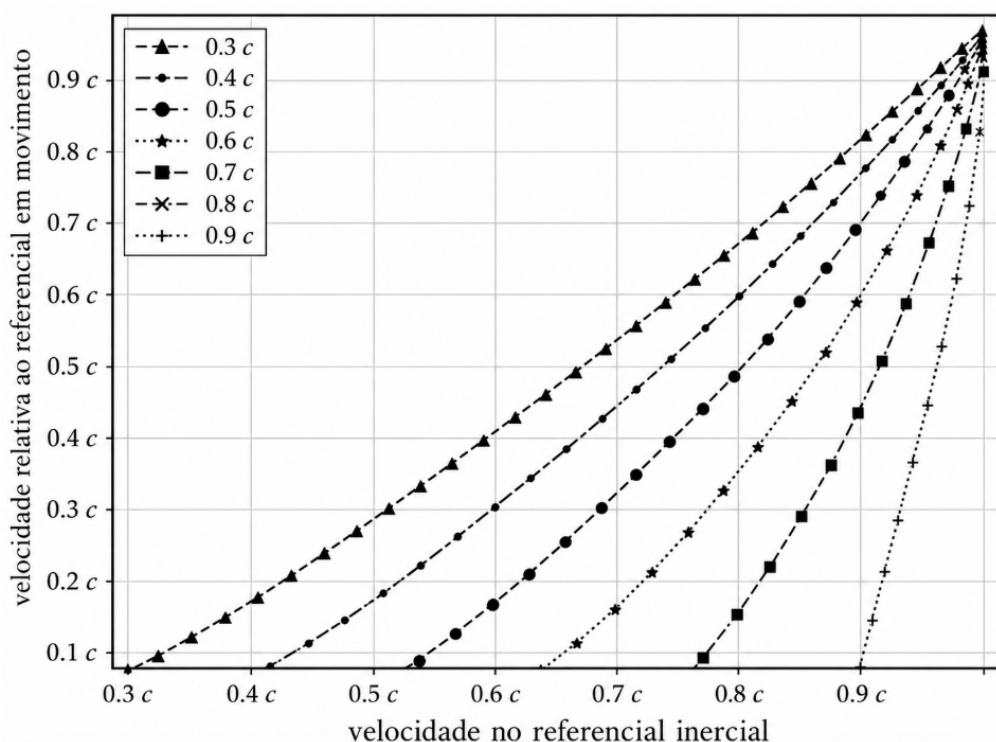
Além disso, ambas as roldanas têm a mesma velocidade linear v que é igual a velocidade das cargas. Usando que a energia do sistema é proveniente do trabalho externo:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} + \frac{2mv^2}{2} &= 4EQ \cdot \Delta x \Rightarrow \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{8EQ \cdot \Delta x}{3m} = 0^2 + 2 \cdot \frac{4EQ}{3m} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Pela comparação com a equação de Torricelli, temos que:

$$a = \frac{4EQ}{3m}$$

Questão 19



A figura mostra a transformação de Lorentz para diversas velocidades ($0,3c$ a $0,9c$) de um referencial em movimento em relação a um referencial inercial. Essa transformação é usada para calcular a velocidade relativa (eixo vertical) de um outro objeto se movimentando no mesmo sentido do referencial que está em alta velocidade ($0,3c$ a $0,9c$). O eixo horizontal exibe uma escala de velocidade em relação ao referencial inercial e o eixo vertical informa a velocidade relativa entre objeto e o referencial em movimento.

Uma nave X e uma nave Y viajam, nos mesmos sentido e direção. A nave X se aproxima de uma fonte de luz parada em relação a um referencial inercial, enquanto que a nave Y se afasta da fonte. Ambas as naves portanto percebem comprimentos de onda diferentes daquele emitido pela fonte.

Dados:

- comprimento de onda emitido pela fonte parada no referencial inercial: λ ;
- comprimento de onda percebido pela nave X: $\lambda/2$;
- comprimento de onda percebido pela nave Y: 3λ ;
- velocidade da luz: c .

Observação:

- a fonte e as naves estão sempre colineares.

Com as informações descritas, conclui-se que o módulo da velocidade relativa entre as naves é de aproximadamente:

A () $0,20c$

B () $0,15c$

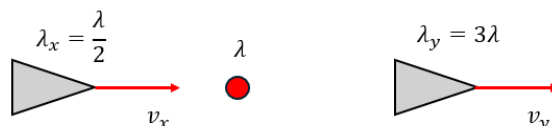
C () $0,75c$

D () $0,92c$

E () $0,39c$

Gabarito: E

Iniciamos determinando as velocidades de X e Y em relação ao referencial da fonte:



X:

$$\lambda_R = \lambda \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4-4\beta = 1+\beta$$

$$\beta_x = 0,6 \Rightarrow v_x = 0,6c$$

Y:

$$\lambda_R = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 3\lambda \Rightarrow \frac{1+\beta}{1-\beta} = 9 \Rightarrow 1+\beta = 9-9\beta$$

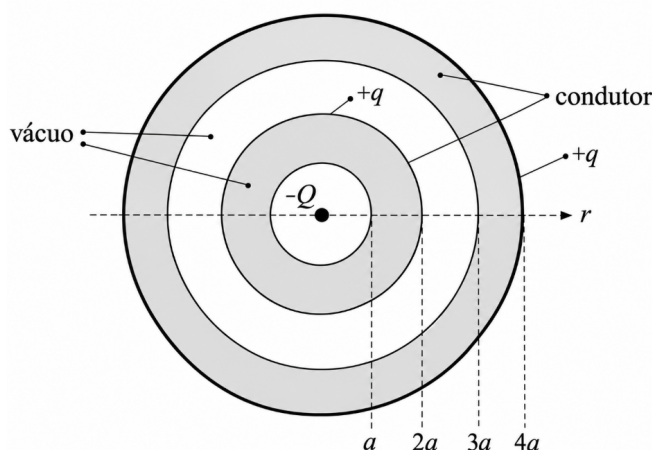
$$\beta_y = 0,8 \Rightarrow v_y = 0,8c$$

A partir das velocidades, determinamos que a nave Y se afasta da nave X. Aplicando na fórmula de velocidade relativa relativística, teremos:

$$V_r = \frac{0,8c - 0,6c}{1 - \frac{0,8c \cdot 0,6c}{c^2}} = \frac{0,2c}{1 - 0,48} = \frac{0,2c}{0,52}$$

$$V_r \approx 0,39c$$

Questão 20



Seja o arranjo tridimensional de cascas esféricas da figura acima, totalmente em repouso e geometricamente simétrico, composto da seguinte forma:

Dados:

- na origem, dentro de uma cavidade de vácuo, encontra-se uma partícula de carga $-Q$;
- na região $a \leq r < 2a$, há uma camada metálica condutora inicialmente descarregada;
- em $r = 2a$, há uma casca muito fina de material não condutor uniformemente carregada com carga $+q$;
- na região $2a < r < 3a$, há outra cavidade de vácuo;
- na região $3a \leq r < 4a$, há outra camada metálica condutora inicialmente descarregada;
- em $r = 4a$, há outra casca muito fina de material não condutor uniformemente carregada com carga $+q$.

Após o estabelecimento do equilíbrio eletrostático nas camadas condutoras, a carga superficial total induzida em $r = 3a$ é:

A () $-Q + 2q$

B () $-q$

C () $+Q - 2q$

D () $+Q$

E () $+Q - q$

Gabarito: E

No equilíbrio eletrostático, o campo elétrico no interior do material condutor deve ser nulo. Assim, aplicamos a Lei de Gauss a uma superfície esférica contida em cada camada metálica.

Para o primeiro condutor, $a \leq r < 2a$, uma superfície gaussiana com $a < r < 2a$ deve envolver carga líquida nula. Como há uma carga $-Q$ na origem:

$$-Q + Q_a = 0 \Rightarrow Q_a = +Q$$

Como esse condutor estava inicialmente descarregado, a soma das cargas induzidas em suas superfícies deve ser nula:

$$Q_a + Q_{2a}^{(\text{cond})} = 0$$

Logo:

$$Q_{2a}^{(\text{cond})} = -Q$$

Em $r = 2a$ existe também a casca não condutora com carga $+q$. Portanto, a carga total existente nessa superfície é:

$$Q_{2a} = -Q + q$$

Considere agora uma superfície gaussiana no interior do segundo condutor, com $3a < r < 4a$. Como novamente $E = 0$ no material metálico, a carga total envolvida deve ser nula:

$$-Q + (+Q) + (-Q + q) + Q_{3a} = 0$$

Portanto:

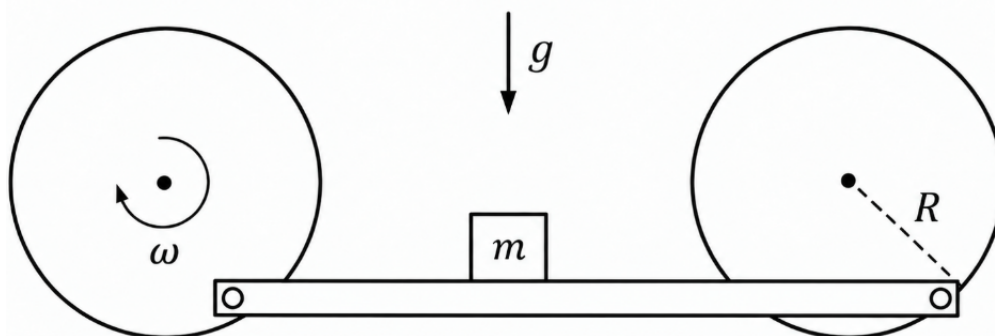
$$Q_{3a} = Q - q$$

A casca localizada em $r = 4a$ não interfere nesse resultado, pois está externa à superfície gaussiana utilizada.

Assim, a carga superficial total induzida em $r = 3a$ é:

$$Q_{3a} = Q - q$$

Questão 21



A figura mostra duas polias acopladas por meio de uma plataforma. As juntas estão localizadas em pontos equivalentes das polias, de forma que a plataforma esteja sempre na horizontal. Um bloco de massa m é colocado sobre a plataforma.

Dados:

- distância entre o centro de uma polia e sua junta de acoplamento: $R = \frac{3}{4}\sqrt{0,44} \text{ m}$;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$;
- coeficiente de atrito estático entre o bloco e a plataforma: $\sqrt{0,44}$;
- o máximo de $a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$.

O valor máximo da rotação ω das polias para que o bloco não deslize na direção horizontal sobre a plataforma, em rad/s, é:

A () $\frac{15}{4}$

B () $\frac{10}{3}$

C () $2\sqrt{3}$

D () $3\sqrt{5}$

E () $2\sqrt{5}$

Gabarito: B

A plataforma permanece horizontal e seu centro de massa executa uma rotação em torno do ponto médio entre as duas polias. Para uma rotação uniforme de velocidade angular ω , sua aceleração tem módulo $a_0 = R\omega^2$.

Seja θ o ângulo que o raio até a junta de acoplamento faz com a horizontal. As componentes da aceleração são:

$$a_x = \omega^2 R \cos \theta, \quad a_y = \omega^2 R \sin \theta.$$

Para que o bloco acompanhe a plataforma sem deslizar, o atrito deve ser responsável por fornecer a aceleração horizontal. Na direção vertical, a força normal N varia durante o movimento:

$$F_{at} = m\omega^2 R \cos \theta, \quad N - mg = m\omega^2 R \sin \theta \Rightarrow N = m(g + \omega^2 R \sin \theta).$$

Chamando de μ o coeficiente de atrito estático, a condição para que a F_{at} consiga manter o movimento é $F_{at} \leq \mu N$:

$$m\omega^2 R \cos(\theta) \leq \mu m(g + \omega^2 R \sin(\theta)).$$

Isolando ω :

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{R(\cos(\theta) - \mu \sin(\theta))}}$$

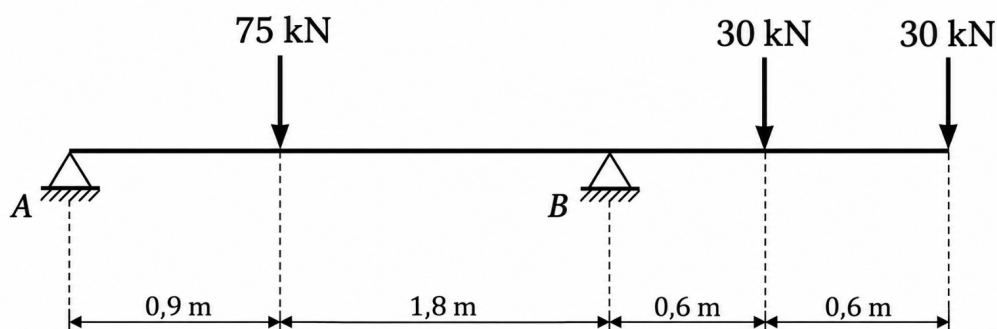
O valor de ω sempre tem que ser menor ou igual a esta função, que varia em função de θ . Para limitar ω ao máximo, devemos pegar o menor valor possível da função de θ , e falar que este é o valor máximo que ω pode assumir.

Pela dica do enunciado, temos que o valor máximo de $\cos(\theta) - \mu \sin(\theta)$ é $\sqrt{1 + \mu^2}$, então já sabemos minimizar a função. Com $\mu = \sqrt{0,44}$, $R = \frac{3}{4}\sqrt{0,44} \text{ m}$ e $\sqrt{1 + \mu^2} = 1,2$:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu g}{R\sqrt{1+\mu^2}}} = \sqrt{\frac{10}{(3/4) \cdot 1,2}} = \boxed{\frac{10}{3} \text{ rad/s}}.$$

Esse limite também mantém a força normal positiva durante todo o movimento.

Questão 22



Na ilustração acima, três forças são aplicadas a uma viga horizontal estável de peso desprezível. Supondo F_B e F_A como sendo as reações nos apoios B e A, respectivamente, o equilíbrio da viga resulta que a razão entre os módulos de F_B e F_A é aproximadamente:

A () 3,50

B () 0,29

C () 2,10

D () 1,83

E () 2,50

Gabarito: A

Primeiro, realizamos o equilíbrio de forças no eixo y:

$$F_A + F_B = 30 + 30 + 75 = 135 \text{ kN} \quad (i)$$

Agora, realizamos o somatório de momentos no ponto A:

$$F_B \cdot 2,7 = 75 \cdot 0,9 + 30 \cdot 3,3 + 30 \cdot 3,9$$

$$F_B = 105 \text{ kN}$$

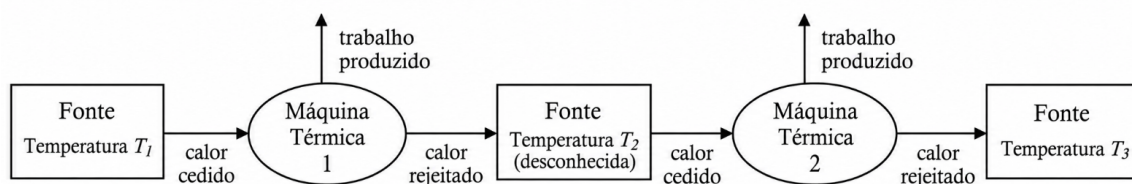
Substituindo na equação (i):

$$F_A = 135 - 105 = 30 \text{ kN}$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{F_B}{F_A} = \frac{105}{30} \approx 3,5}$$

Questão 23



Duas máquinas térmicas, ambas operando em ciclos de Carnot, são acopladas em série. A primeira máquina recebe calor de um reservatório térmico que se encontra a uma temperatura T_1 , produz certa quantidade de trabalho e rejeita calor para um reservatório térmico intermediário de temperatura T_2 desconhecida. Por sua vez, este reservatório cede calor para a segunda máquina que também produz trabalho e cede energia para um terceiro reservatório térmico cuja temperatura é T_3 .

O trabalho disponibilizado pela segunda máquina é 40% daquele associado ao primeiro ciclo. Já o calor que alimenta a segunda máquina é igual a 80% da energia rejeitada pelo primeiro ciclo para a fonte intermediária.

Dados:

- Temperatura T_1 : 900K;
- Temperatura T_3 : 300K.

A partir do contexto acima, a soma numérica dos rendimentos das duas máquinas é igual a:

A () $\frac{12}{45}$

B () $\frac{15}{45}$

C () $\frac{38}{45}$

D () $\frac{40}{45}$

E () $\frac{43}{45}$

Gabarito: C

Por estarem operando em ciclos de Carnot:

Máquina 1:

$$\frac{T_2}{900} = \frac{Q_{F1}}{Q_{Q1}}$$

Máquina 2:

$$\frac{300}{T_2} = \frac{Q_{F2}}{Q_{Q2}}$$

Multiplicando as equações e usando que $Q_{Q2} = 0,8 \cdot Q_{F1}$:

$$\frac{T_2}{900} \cdot \frac{300}{T_2} = \frac{Q_{F1}}{Q_{Q1}} \cdot \frac{Q_{F2}}{0,8 \cdot Q_{F1}} \Rightarrow Q_{F2} = \frac{4}{15} Q_{Q1}$$

Em seguida, utiliza-se a relação entre os trabalhos realizados pelas máquinas ($W = Q_Q - Q_F$) para encontrar a razão entre os calores da Máquina 1.

Sabe-se que $W_2 = 0,4 \cdot W_1$ e $Q_{Q2} = 0,8 \cdot Q_{F1}$. Logo:

$$Q_{Q2} - Q_{F2} = 0,4(Q_{Q1} - Q_{F1})$$

Substituindo Q_{Q2} e Q_{F2} pelas relações encontradas anteriormente:

$$0,8 \cdot Q_{F1} - \frac{4}{15} Q_{Q1} = 0,4 \cdot Q_{Q1} - 0,4 \cdot Q_{F1}$$

$$\frac{Q_{F1}}{Q_{Q1}} = \frac{5}{9} \rightarrow \eta_1 = 1 - \frac{Q_{F1}}{Q_{Q1}} = 1 - \frac{5}{9}$$

$$\eta_1 = \frac{4}{9}$$

Com a razão da Máquina 1 definida, substitui-se de volta nas relações iniciais para descobrir a razão dos calores da Máquina 2 e, consequentemente, o seu rendimento (η_2).

Como $\frac{Q_{F1}}{Q_{Q1}} = \frac{5}{9}$:

$$\frac{\frac{Q_{Q2}}{0,8}}{\frac{15 \cdot Q_{F2}}{4}} = \frac{5}{9} \rightarrow \frac{Q_{F2}}{Q_{Q2}} = \frac{3}{5} \rightarrow \eta_2 = 1 - \frac{3}{5}$$

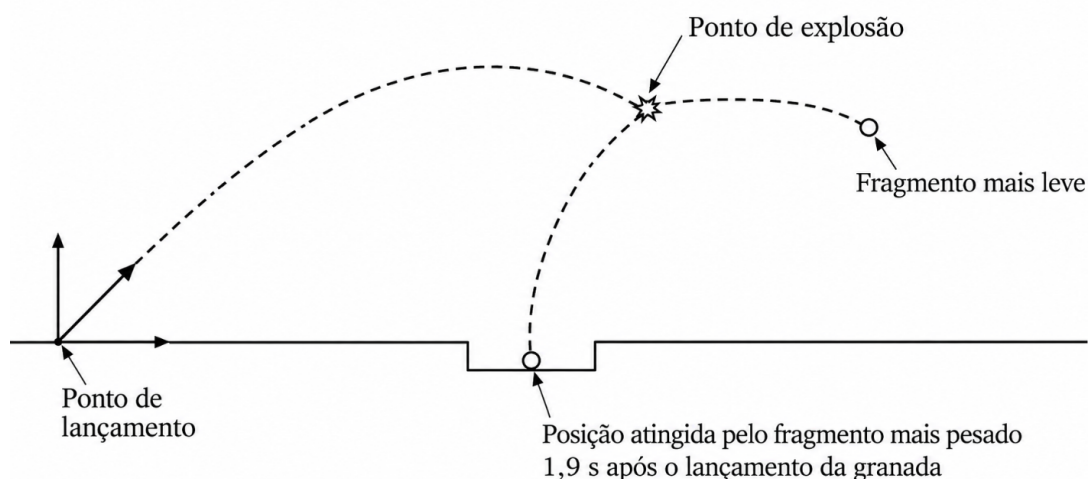
$$\eta_2 = \frac{2}{5}$$

Por fim, calcula-se a soma dos rendimentos das duas máquinas.
Portanto:

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{4}{9} + \frac{2}{5}$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{38}{45}$$

Questão 24



Um soldado lança uma granada a uma velocidade inicial de $10\sqrt{2}$ m/s, por uma direção que perfaz um ângulo de 45° com o solo. Antes de atingir o solo, a granada explode, dividindo-se em dois fragmentos de $2/3$ e $1/3$ de sua massa inicial. Após a explosão, o fragmento mais leve se projeta à direita e o mais pesado à esquerda, conforme a figura. Exatamente após 1,9 s do lançamento da granada, o fragmento mais pesado atinge um pequeno buraco de 5 cm de profundidade no solo.

Dado:

- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

No instante em que o fragmento mais pesado atinge o solo, a distância vertical, em cm, do fragmento mais leve até o solo é:

A () 5

B () 95

C () 295

D () 145

E () 195

Gabarito: C

Iniciamos a questão visualizando que o centro de massa da granada não altera sua trajetória em consequência da explosão, continuando a percorrer o lançamento oblíquo inicial.

Determinando o centro de massa em $t = 1,9$ s:

$$y_{cm} = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow y_{cm} = 10 \cdot 1,9 - 5 \cdot 1,9^2 = 19 - 18,05$$

$$y_{cm} = 0,95 \text{ m}$$

Determinada a posição do CM no instante final, determinaremos a coordenada vertical da parte mais leve da granada:

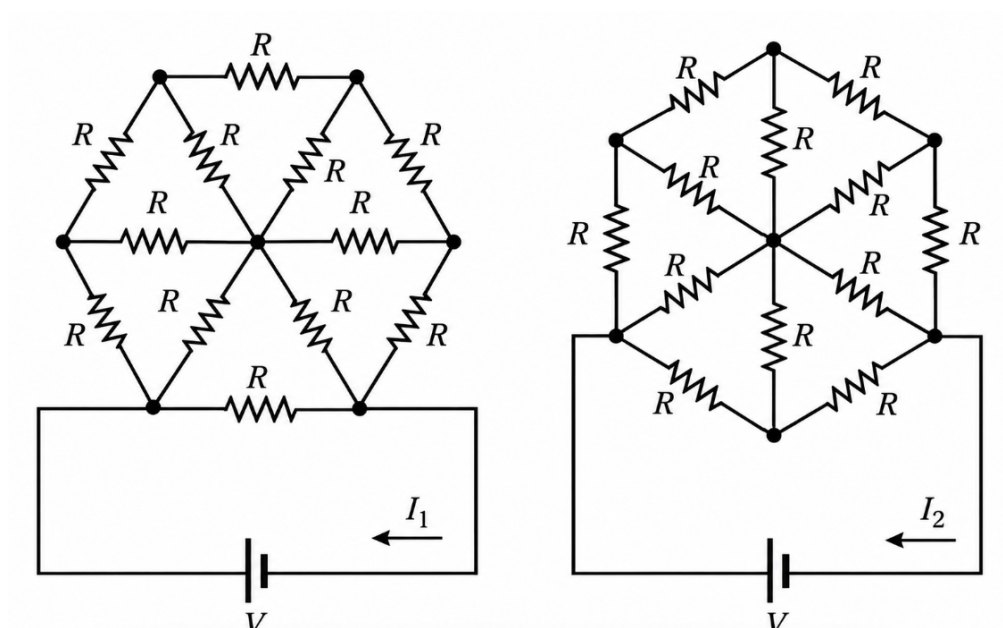
$$y_{cm} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow 95 = \frac{\frac{2M}{3}(-5) + \frac{M}{3}y_2}{M}$$

$$285 = y_2 - 10$$

$$y_2 = 295 \text{ cm}$$

Questão 25

Duas malhas resistivas são construídas conforme a figura.



Dica:

- $R = R/2 + R/2$.

A razão entre as correntes I_1 e I_2 é um número real pertencente ao intervalo:

A () $(0, 1/2)$

B () $(1/2, 1)$

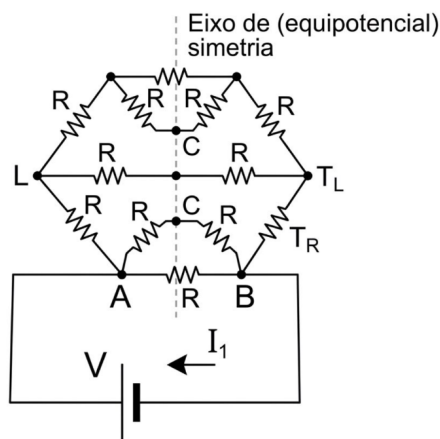
C () $(1, 3/2)$

D () $(3/2, 2)$

E () $(2, 5/2)$

Gabarito: X

Por simetria, pode-se soltar fios que estejam ligados aos nós C (do eixo de simetria equipotencial), de forma que resistores simétricos estejam em série. Logo:



Utilizando série e paralelo entre resistores do primeiro circuito, tem-se que:

- Paralelo:

$$\frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2R}{3}$$

- Série:

$$\frac{2R}{3} + R + R = \frac{8R}{3}$$

- Paralelo:

$$\frac{\frac{8R}{3} \cdot R}{\frac{8R}{3} + R} = \frac{8R}{7}$$

- Série:

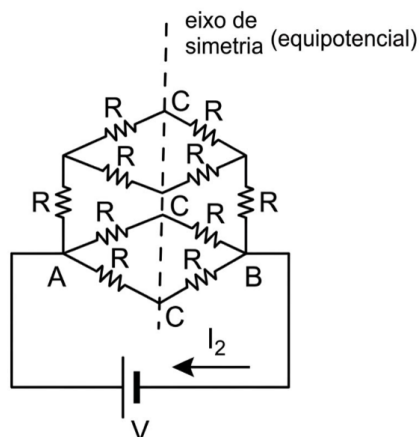
$$\frac{8R}{7} + 2R = \frac{22R}{7}$$

- Paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{7}{22R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \rightarrow R_{eq} = \frac{11R}{20}$$

Logo:

$$U = R_{eq} I_1 \rightarrow I_1 = \frac{20}{11} \frac{V}{R}$$



Utilizando série e paralelo entre resistores do primeiro circuito, tem-se que:

- Paralelo:

$$\frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R$$

- Série:

$$R + R + R = 3R$$

- Paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{R} \rightarrow R_{eq} = \frac{3R}{4}$$



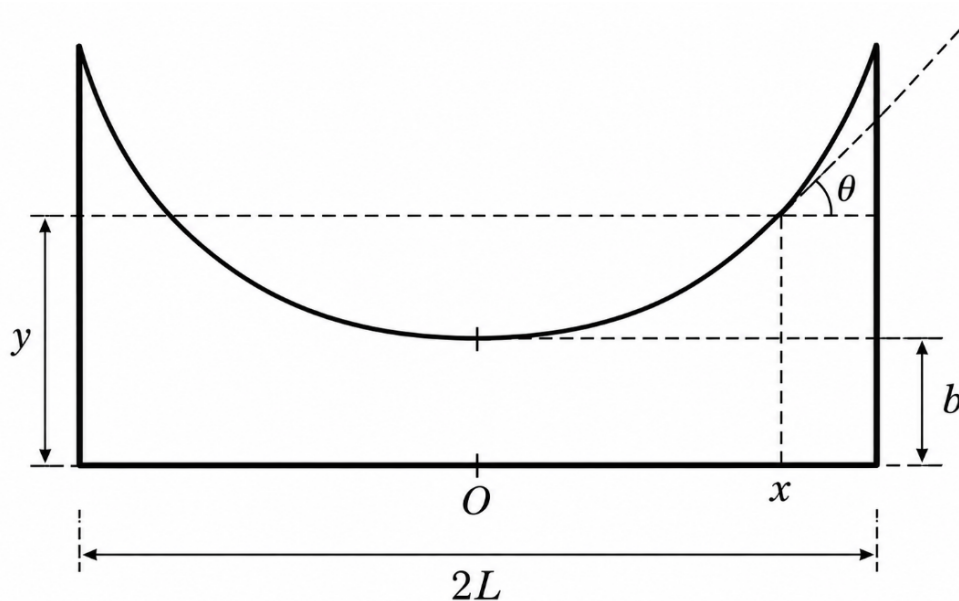
Logo:

$$U = R_{eq} I_2 \rightarrow I_2 = \frac{4}{3} \frac{V}{R}$$

Portanto:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{15}{11} \approx 1,36$$

Questão 26



Uma corda perfeitamente flexível e inextensível está com suas extremidades presas a dois pontos, separados pela distância $2L$, no teto horizontal de uma sala. A curva feita pela corda é conhecida na estática como catenária, sendo dada por:

$$y(x) = (e^{x/b} + e^{-x/b}).b/2$$

onde b é uma constante que depende de dimensões do aparato montado.

Dados:

- $-L \leq x \leq +L$;
- $\tan \theta(x) = (e^{x/b} - e^{-x/b})/2$;
- densidade linear da corda: constante;
- comprimento total da corda: S ;
- aceleração da gravidade: g .

Dica:

- obtenha equações de equilíbrio estático na corda como um todo e depois em metade da corda.

O valor local mínimo da velocidade de um pulso ondulatório transversal é:

A () $\sqrt{\frac{1}{2}Sg(e^{L/b} - e^{-L/b})}$

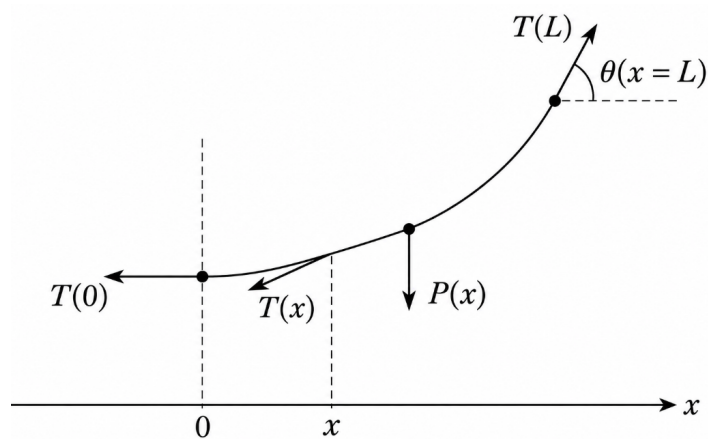
B () $\sqrt{Sg(e^{L/b} - e^{-L/b})}$

C () $\frac{1}{2}\sqrt{Sg(e^{L/b} - e^{-L/b})^{-1}}$

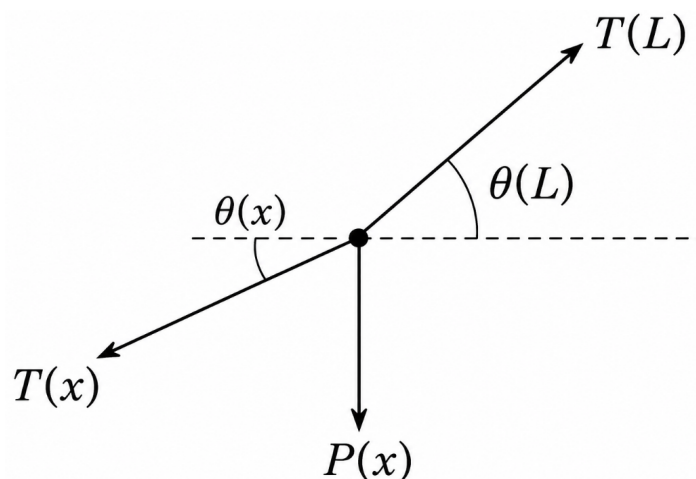
D () $\sqrt{Sg(e^{L/b} - e^{-L/b})^{-1}}$

E () $\frac{1}{2}\sqrt{Sg(e^{L/b} - e^{-L/b})}$

Gabarito: D



Para um ponto genérico x :



Pelo equilíbrio no eixo x , a componente horizontal da tensão é constante:

$$T(x) \cos \theta(x) = T(L) \cos \theta(L)$$

Para minimizar $T(x)$, devemos maximizar $\cos \theta(x)$. Como

$$\cos \theta(x) \leq 1,$$

o valor máximo ocorre quando

$$\cos \theta(x) = 1 \implies \theta(x) = 0.$$

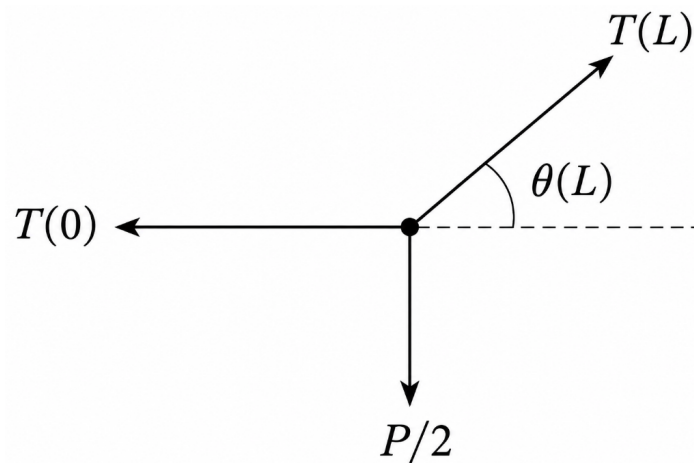
Isso ocorre em $x = 0$, portanto:

$$x = 0$$

é o ponto onde a tensão é mínima.

Etapas 1. Determinação da tensão mínima:

No ponto $x = 0$, temos pelo diagrama de forças:



$$\tan \theta(L) = \frac{P/2}{T}$$

Do enunciado:

$$\tan \theta(L) = \frac{e^{L/b} - e^{-L/b}}{2}.$$

Assim,

$$\frac{e^{L/b} - e^{-L/b}}{2} = \frac{P}{2T}$$

Multiplicando ambos os lados por 2:

$$e^{L/b} - e^{-L/b} = \frac{P}{T}$$

Logo,

$$\frac{T}{P} = (e^{L/b} - e^{-L/b})^{-1}$$

Como

$$P = \mu Sg$$

temos:

$$\frac{T}{\mu Sg} = (e^{L/b} - e^{-L/b})^{-1}$$

Portanto,

$$\frac{T}{\mu} = Sg (e^{L/b} - e^{-L/b})^{-1}$$

Como a velocidade está relacionada à tensão por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

segue que

$$v = \sqrt{Sg (e^{L/b} - e^{-L/b})^{-1}}$$

Questão 27

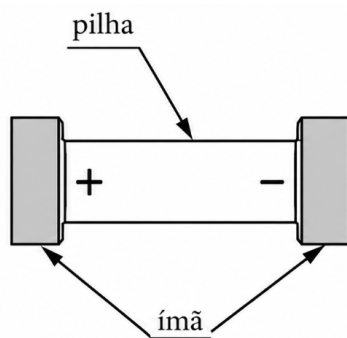


Figura 1

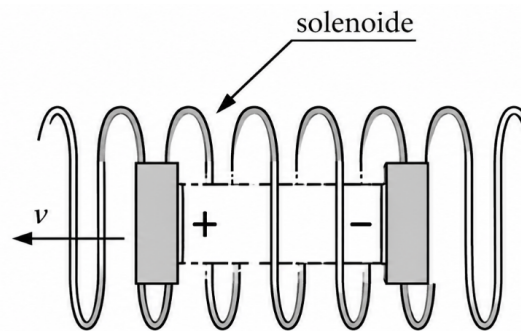


Figura 2

Considere o projétil mostrado na Figura 1 que consiste de uma pilha e um ímã em cada uma das extremidades, cada um deles fazendo contato com o solenoide. O atirador coloca o projétil completamente no interior do solenoide, começando da extremidade direita e, a partir desse momento, o projétil sai do repouso e acelera para a outra extremidade, conforme mostrado na Figura 2.

Dados:

- resistência por espira do solenoide: $0,04\,\Omega$;
- os pontos de contato dos ímãs com o solenoide sempre distam 10 espiras;
- campo magnético produzido pelos ímãs: $1,5\,\text{T}$;
- ddp da pilha: $6\,\text{V}$;
- massa do projétil: $10\,\text{g}$;
- comprimento do projétil: $50\,\text{mm}$;
- comprimento do solenoide: $300\,\text{mm}$;
- permeabilidade magnética do meio: $2 \cdot 10^{-6}\,\text{T} \cdot \text{m/A}$.

Observação:

- experimentalmente estima-se que a força à qual o projétil é submetido, em Newtons, é numericamente igual a 45 vezes o produto entre o campo magnético produzido pela circulação da corrente no interior do solenoide e o campo magnético produzido pelo ímã (ambos em Tesla).

Dado o contexto, o projétil começa a deixar o solenoide à velocidade, em m/s, de:

A () 4,5

B () 5,0

C () 3,0

D () 3,5

E () 4,0

Gabarito: A

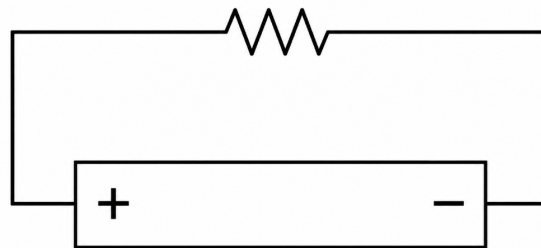
Do enunciado:

$$F_{\text{mag}} = 45 \cdot B_{\text{ind}} \cdot B_{\text{im}}$$

Portanto, basta descobrir o campo induzido no solenoide.



10 · Resp.



Calculando a corrente no solenoide:

$$U = R \cdot i$$

$$6 \text{ V} = (10 \cdot 0,04 \Omega) \cdot i$$

$$i = 15 \text{ A}$$

Agora que já temos a corrente:

$$B_{ind} = \mu \cdot \frac{N}{L} \cdot i$$

$$B_{ind} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{10}{50 \cdot 10^{-3}} \cdot 15$$

$$B_{ind} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Logo:

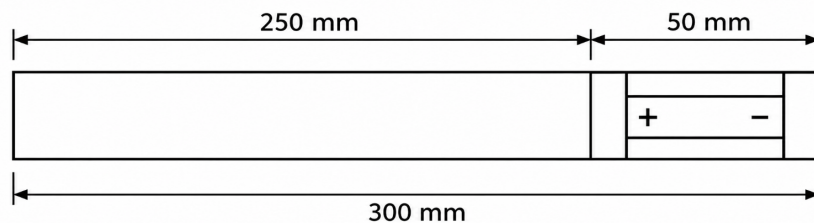
$$F_{mag} = 45 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5$$

$$F_{mag} = 0,405 \text{ N}$$

Usando que:

$$W = \Delta E_c$$

Como a força magnética realiza trabalho sobre o ímã ao longo de 250 mm:

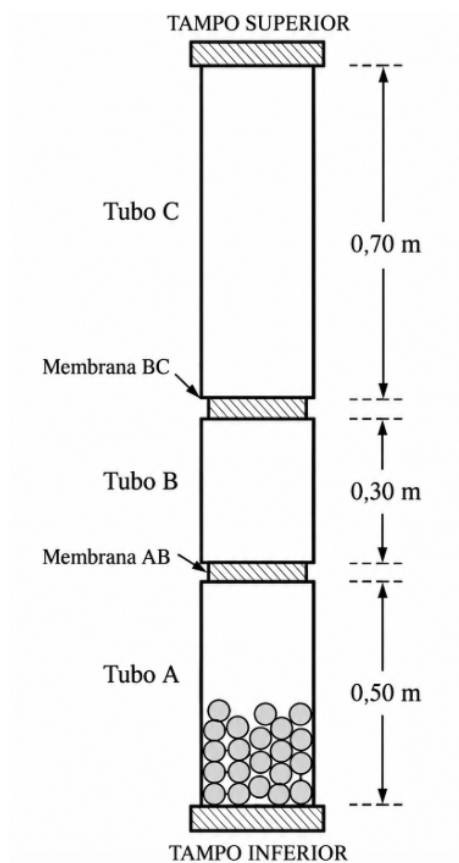


$$\frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot v^2}{2} = 0,405 \cdot 250 \cdot 10^{-3}$$

Portanto:

$$v = 4,5 \text{ m/s}$$

Questão 28



Um certo número de pequenas esferas de uma liga metálica é colocado no interior de três tubos verticais de PVC, conectados em série, inicialmente conforme o desenho da figura. As passagens de A para B e de B para C estão fechadas por membranas resistentes.

Num experimento, o conjunto sofre inversões, onde uma inversão é um giro de 180° . Nas primeiras 8 inversões, as esferas percorrem apenas o tubo A. Em seguida, retira-se a membrana entre A e B, e as esferas percorrem os tubos A + B por mais 10 inversões. Por fim, retira-se a membrana entre B e C, e as esferas percorrem os tubos A + B + C por mais 12 inversões.

Dados:

- calor específico da liga metálica: $c = 150 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$;
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Observações:

- durante uma inversão, considere que as bolinhas permaneçam na mesma posição relativa dentro do tubo e apenas caiam após o fim da inversão;
- despreze o volume das esferas e a espessura das membranas;
- para a transformação em calor, considere apenas a totalidade da energia proveniente das quedas das bolinhas.

Ao final das 30 inversões, o aumento de temperatura das esferas, em $^\circ\text{C}$, é:

A () 2,5

B () 2,0

C () 1,5

D () 1,0

E () 0,5

Gabarito: B

Como o impacto após cada queda gera calor, temos:
 $\Delta Q = \Delta E_{\text{mec}}$

Após todas as inversões:

$$m c \Delta T = 8 m g h_A + 10 m g (h_A + h_B) + 12 m g (h_A + h_B + h_C)$$

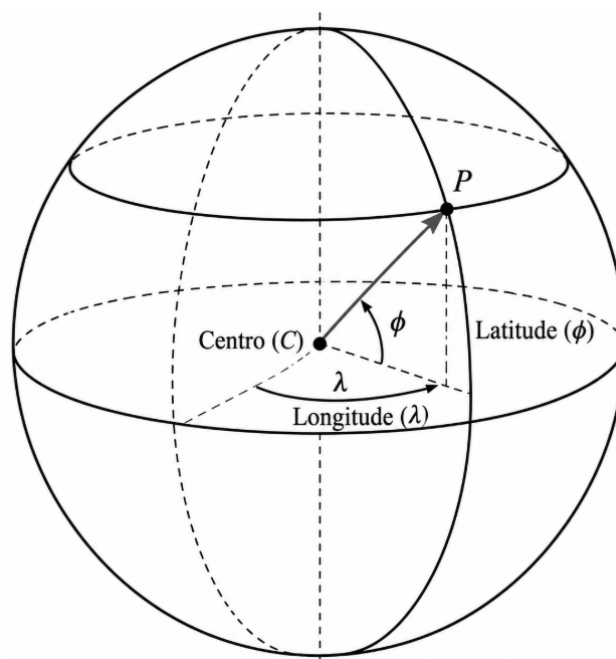
Substituindo os valores:

$$150 \text{ J/kg} \Delta T = (8 \cdot 10 \cdot 0,5 + 10 \cdot 10 \cdot 0,8 + 12 \cdot 10 \cdot 1,5) \text{ J/kg}$$

Portanto:

$$\Delta T = 2^\circ \text{C}$$

Questão 29



A latitude e a longitude são coordenadas geográficas que oferecem a posição de ponto qualquer na Terra. A latitude é referenciada em relação à Linha do Equador (0° a 90° , Norte ou Sul). Já a longitude é referenciada em relação ao Meridiano de Greenwich (0° a 180° , Leste ou Oeste).

Sobre a superfície da Terra, uma fibra ótica deve ligar dois pontos A e B.

Dados:

- coordenadas do ponto A: latitude 45° Norte e longitude 0° ;
- coordenadas do ponto B: latitude 45° Norte e longitude 90° Leste;
- raio da Terra: R ;
- índice de refração da fibra ótica: n ;
- velocidade da luz no vácuo: c .

O menor tempo de viagem possível de um sinal ótico pela fibra, a ser posicionada sobre a superfície da Terra, entre os pontos A e B é:

A () $\frac{\pi R n}{6c}$

B () $\frac{\sqrt{3} \pi R n}{4c}$

C () $\frac{\sqrt{2} \pi R n}{4c}$

D () $\frac{\pi R n}{3c}$

E () $\frac{\sqrt{3} \pi R n}{2c}$

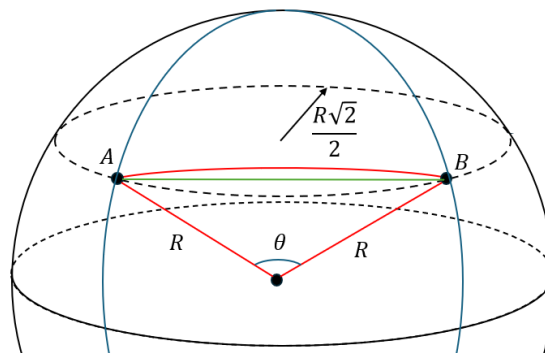
Gabarito: D

Iniciamos a questão identificando que, como a velocidade da luz será constante ao longo da fibra ótica, teremos que o tempo mínimo de viagem do sinal será:

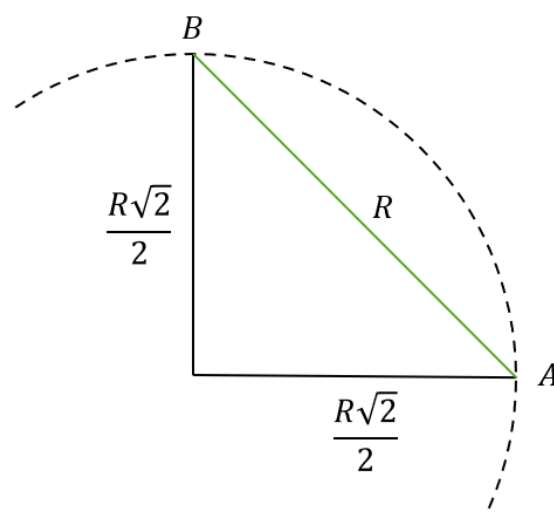
$$\Delta t_{mn} = \frac{\Delta S_{mn}}{v_n}$$

Onde v_n é a velocidade da luz na fibra óptica, $v_n = \frac{c}{n}$. Portanto, devemos determinar qual o menor deslocamento a ser realizado pela fibra óptica entre os pontos A e B.

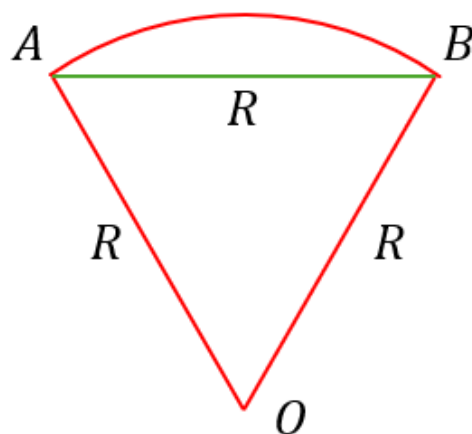
Um ponto importante de se observar é que o menor deslocamento **Não será** o arco de latitude constante, e sim um arco que corta a esfera passando pelos pontos A, B e o centro:



Portanto, devemos determinar o ângulo de abertura do setor circular. Para isso, utilizaremos a circunferência de latitude 45° , cujo raio é igual a $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ de modo a determinar o tamanho da corda AB:



Determinado o valor da corda AB, analisamos o setor circular AOB:



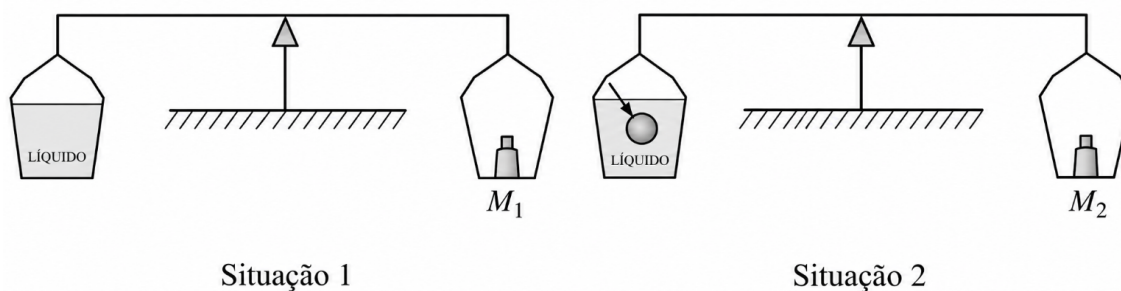
Da figura, vemos que o triângulo OAB é um triângulo equilátero, logo, o ângulo central será de 60° . Desse modo, o deslocamento mínimo será:

$$\Delta S_{min} = \frac{\pi R}{3}$$

Portanto, o tempo mínimo é:

$$\Delta t_{mn} = \frac{\pi R n}{3c}$$

Questão 30



As situações acima mostram um balde contendo um líquido de densidade conhecida. O balde é colocado em uma balança que atinge o equilíbrio em duas situações. Na Situação 1, o equilíbrio ocorre quando, no lado da balança oposto ao balde, é colocado um objeto de massa M_1 , que é igual também à massa do líquido. Já, na Situação 2, a balança entra em equilíbrio quando, no lado da balança oposto ao balde, é colocado um objeto de massa M_2 . Ainda na Situação 2, uma esfera é totalmente imersa no líquido por um pesquisador, com a superfície da esfera tangenciando a face do líquido. O pesquisador mantém sua mão imóvel e em contato com a esfera, de forma que nenhuma parte de sua mão fique submersa.

Dados:

- massa específica do líquido: ρ ;
- raio da esfera: R ;
- massa da esfera: m_e .

Observações:

- despreze as massas do balde e dos demais componentes da balança;

Para garantir a consistência das informações, a massa M_2 é:

A () $M_1 + \frac{4}{3}\rho\pi R^3 + m_e$

B () $M_1 + m_e$

C () $M_1 - \frac{4}{3}\rho\pi R^3 + m_e$

D () $M_1 + \frac{4}{3}\rho\pi R^3$

E () $M_1 + \frac{4}{3}\rho\pi R^3 - m_e$

Gabarito: D

Pelo enunciado tiramos que $m_{\text{líquido}} = M_1$.

Assim, para a situação 2 temos o equilíbrio do lado esquerdo:

$$T_1 = E + m_{\text{líquido}}g \rightarrow T_1 = E + M_1g$$

Sendo E o empuxo: $E = \rho \cdot V_{\text{esfera}} \cdot g$ e $V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi R^3}{3}$

Equilíbrio do lado direito:

$$T_2 = M_2g$$

Equilíbrio de rotação em relação ao ponto do meio:

$$T_1 \cdot l/2 = T_2 \cdot l/2 \rightarrow T_1 = T_2$$

Portanto:

$$M_2g = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot g + M_1g$$

$$M_2 = M_1 + \frac{4}{3}\rho\pi R^3$$

Equipe de Física



Matheus Marins - Coordenador André Gustavo Breno Cabral Igor Brito Lucas Eccard Márcio Gordo Renan Nunes

**GABARITO QUÍMICA****Questão 31**

Em 1926, o físico austríaco Erwin Schrödinger formulou a equação que descreve matematicamente o comportamento ondulatório do elétron no átomo. As soluções da equação para o átomo de hidrogênio levam naturalmente ao surgimento dos números quânticos principal (n), azimutal (l) e magnético (m_l), que caracterizam os orbitais atômicos. A descrição completa dos estados eletrônicos inclui ainda o número quântico de spin (m_s), introduzido posteriormente.

Considere um elétron pertencente ao subnível **3p**. Com base nas definições dos números quânticos, assinale a alternativa correta.

- A** () O número quântico principal do elétron é $n = 2$.
- B** () O número quântico azimutal do elétron é $l = 2$.
- C** () O número quântico magnético do elétron pode assumir os valores $m_l = -1, 0$ ou $+1$.
- D** () O elétron só pode apresentar spin $m_s = +\frac{1}{2}$.
- E** () O subnível ao qual o elétron pertence comporta, no máximo, oito elétrons.

Gabarito: C

O subnível fixa os dois primeiros números quânticos: o algarismo dá n e a letra dá l . Os valores possíveis de m_l e de m_s seguem daí.

Etapla 1. Verifique n e l do subnível.

Em **3p**, o algarismo é o número quântico principal e a letra representa o número quântico secundário:

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ l &= 1 \quad (s \rightarrow 0, p \rightarrow 1, d \rightarrow 2, f \rightarrow 3) \end{aligned}$$

Isso já descarta as alternativas que afirmam $n = 2$ e $l = 2$.

Etapla 2. Determine os valores possíveis de m_l .

O número quântico magnético pode assumir os valores inteiros de $-l$ a $+l$:

$$m_l \in \{-1, 0, +1\}$$

São três orbitais degenerados, os p_x , p_y e p_z .

Etapla 3. Confira o spin e o preenchimento do subnível.

O número quântico de spin admite os dois valores $m_s = \pm \frac{1}{2}$ para qualquer elétron, e não apenas $+\frac{1}{2}$.

Cada um dos três orbitais comporta dois elétrons, de spins opostos, de modo que o subnível p comporta seis elétrons, e não oito:

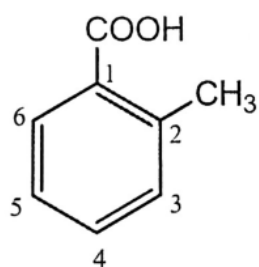
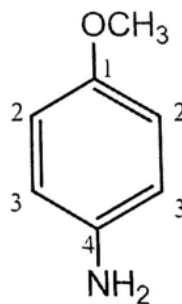
$$2(2l + 1) = 2(2 \cdot 1 + 1) = \boxed{6}$$

A única afirmação correta é a dos valores de m_l .



Questão 32

Sejam as duas moléculas abaixo:

**I****II**

Considere que ambas sofrerão mononitração nos anéis aromáticos via substituição eletrofílica.

Dentre as opções a seguir, indique aquela que apresenta as posições mais viáveis de introdução do grupo nitro nas moléculas **I** e **II**, respectivamente.

A () 5 e 2**B** () 4 e 3**C** () 6 e 2**D** () 3 e 3**E** () 4 e 2**Gabarito: A**

Molécula I

O grupo -COOH é metadirigente e favorece a substituição nas posições 3 e 5. O grupo -CH_3 é orto-para-dirigente e também favorece essas posições: 3 é orto e 5 é para em relação ao metil. Assim, os efeitos eletrônicos dos dois substituintes são concordantes. Entre essas posições, a posição 5 é favorecida pelo menor impedimento estérico, pois está mais distante do grupo metil.

Molécula II

Admitindo o meio fortemente ácido usual da nitração, o grupo -NH_2 é protonado, formando -NH_3^+ , que é metadirigente e favorece as posições indicadas pelo número 2. O grupo -OCH_3 é orto-para-dirigente e também favorece essas posições, que são orto em relação a ele. Portanto, a introdução do grupo nitro é favorecida na posição 2, resultando na alternativa (A)



Questão 33

Considere as seguintes reações:

- oxidação de CrCl_3 com Br_2 em meio básico (KOH).
- oxidação de KNO_2 com KMnO_4 em meio ácido (H_2SO_4).
- ação do Cl_2 em água de cal (Ca(OH)_2) a frio.

Assinale a alternativa que contém APENAS reações quimicamente possíveis.

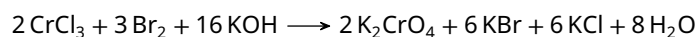
- A ()** i. $2\text{CrCl}_3 + 3\text{Br}_2 + 16\text{KOH} \longrightarrow 2\text{K}_2\text{CrO}_3 + 6\text{KBr} + 6\text{KCl} + 8\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$;
ii. $5\text{KNO}_2 + 2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow 2\text{MnO}_2 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 5\text{KNO}_3 + 2\text{SO}_2 + 3\text{H}_2\text{O}$;
iii. $2\text{Cl}_2 + 2\text{Ca(OH)}_2 \longrightarrow \text{Ca(ClO)}_2 + \text{CaCl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$
- B ()** i. $2\text{CrCl}_3 + 3\text{Br}_2 + 16\text{KOH} \longrightarrow 2\text{K}_2\text{CrO}_4 + 6\text{KBr} + 6\text{KCl} + 8\text{H}_2\text{O}$;
ii. $5\text{KNO}_2 + 2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow 2\text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 5\text{KNO}_3 + 3\text{H}_2\text{O}$;
iii. $2\text{Cl}_2 + 2\text{Ca(OH)}_2 \longrightarrow \text{Ca(ClO)}_2 + \text{CaCl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$
- C ()** i. $2\text{CrCl}_3 + 3\text{Br}_2 + 16\text{KOH} \longrightarrow 2\text{K}_2\text{CrO}_4 + 6\text{KBr} + 6\text{KCl} + 8\text{H}_2\text{O}$;
ii. $5\text{KNO}_2 + 2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow 2\text{MnO}_2 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 5\text{KNO}_3 + 2\text{SO}_2 + 3\text{H}_2\text{O}$;
iii. $2\text{Cl}_2 + \text{Ca(OH)}_2 \longrightarrow \text{CaCl}_2 + \text{Cl}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$
- D ()** i. $2\text{CrCl}_3 + 3\text{Br}_2 + 16\text{KOH} \longrightarrow 2\text{K}_2\text{CrO}_4 + 6\text{KBr} + 6\text{KCl} + 8\text{H}_2\text{O}$;
ii. $5\text{KNO}_2 + 2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow 2\text{MnO}_2 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 5\text{KNO}_3 + 2\text{SO}_2 + 3\text{H}_2\text{O}$;
iii. $2\text{Cl}_2 + \text{Ca(OH)}_2 \longrightarrow \text{CaCl}_2 + \text{Cl}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$
- E ()** i. $2\text{CrCl}_3 + 3\text{Br}_2 + 16\text{KOH} \longrightarrow 2\text{K}_2\text{CrO}_3 + 6\text{KBr} + 6\text{KCl} + 8\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$;
ii. $5\text{KNO}_2 + 2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow 2\text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 5\text{KNO}_3 + 3\text{H}_2\text{O}$;
iii. $2\text{Cl}_2 + \text{Ca(OH)}_2 \longrightarrow \text{CaCl}_2 + \text{Cl}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$

Gabarito: B

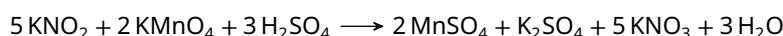
Cada uma das três reações tem um produto característico do meio em que ocorre. Basta identificar esse produto para eliminar as alternativas erradas.

Etapla 1. Determine o produto de cromo em meio básico.

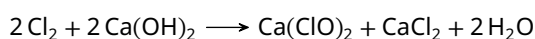
O Br_2 oxida o Cr^{3+} até o estado +6. Em meio básico a espécie estável desse estado é o cromato, CrO_4^{2-} , e não o dicromato, que só predomina em meio ácido. O produto é o K_2CrO_4 .

**Etapla 2.** Determine o produto de manganês em meio ácido.

O MnO_4^- é reduzido de forma diferente conforme o meio: a Mn^{2+} em meio ácido, a MnO_2 em meio neutro ou levemente básico. Como o enunciado fixa H_2SO_4 , o produto é o Mn^{2+} , que aparece como MnSO_4 .

**Etapla 3.** Determine o produto do cloro em água de cal a frio.

A frio, o Cl_2 sofre desproporcionamento em meio básico: parte vai a Cl^- e parte a ClO^- , formando o hipoclorito de cálcio.



A única alternativa com as três reações corretas é a **(B)**.

**Questão 34**

Uma indústria química realiza o tratamento eletrolítico de soluções contendo íons cloreto para a produção de cloro gasoso, amplamente utilizado na desinfecção de água e em processos industriais. Durante uma etapa do processo, uma corrente elétrica constante de 11 A é aplicada por 52 minutos a uma solução aquosa de cloreto crômico.

Considerações:

- O cloro é liberado no anodo segundo a reação: $2 \text{Cl}^- \longrightarrow \text{Cl}_2 + 2 \text{e}^-$
- Constante de Faraday = 96 500 C/mol de elétrons.

Assinale a alternativa que apresenta o volume aproximado, em litros, de gás cloro produzido nas CNTP.

A () 0,18**B** () 0,36**C** () 2,0**D** () 4,0**E** () 8,0**Gabarito: D**

A carga que atravessa a célula fixa a quantidade de matéria de elétrons. A estequiometria do anodo converte elétrons em cloro, e o volume molar das CNTP converte quantidade de matéria em volume.

Etapa 1. Calcule a carga que atravessou a célula.

A corrente é constante, então a carga é o produto da corrente pelo tempo, com o tempo em segundos:

$$\begin{aligned} Q &= i \cdot \Delta t \\ &= 11 \text{ A} \cdot (52 \cdot 60 \text{ s}) \\ &= 11 \text{ A} \cdot 3120 \text{ s} \\ &= 34\,320 \text{ C} \end{aligned}$$

Etapa 2. Converta a carga em quantidade de matéria de elétrons.

A constante de Faraday é a carga de um mol de elétrons:

$$\begin{aligned} n_{e^-} &= \frac{Q}{F} \\ &= \frac{34\,320 \text{ C}}{96\,500 \frac{\text{C}}{\text{mol}}} \\ &\approx 0,3556 \text{ mol} \end{aligned}$$

Etapa 3. Use a estequiometria do anodo.

A semirreação mostra que cada mol de Cl_2 exige dois mols de elétrons:

$$\begin{aligned} n_{\text{Cl}_2} &= \frac{n_{e^-}}{2} \\ &\approx \frac{0,3556 \text{ mol}}{2} \\ &\approx 0,1778 \text{ mol} \end{aligned}$$

Etapa 4. Converta em volume nas CNTP.

Nas CNTP o volume molar de um gás ideal é $22,4 \frac{\text{L}}{\text{mol}}$:

$$\begin{aligned} V &= n_{\text{Cl}_2} \cdot V_m \\ &\approx 0,1778 \text{ mol} \cdot 22,4 \frac{\text{L}}{\text{mol}} \\ &\approx \boxed{4,0 \text{ L}} \end{aligned}$$

O cloreto crômico apenas fornece os íons cloreto; a espécie Cr^{3+} não participa da reação do anodo.



Questão 35

Sobre o penta-2,3-dieno, é correto afirmar que:

- A () sua molécula não apresenta isomeria ótica.
- B () reage com alkenos pelo mecanismo de Diels-Alder, produzindo um cicloalcano.
- C () as duas ligações π compartilham o mesmo conjunto de orbitais p paralelos, formando um único sistema π estendido.
- D () sua molécula apresenta 3 carbonos com hibridização sp^2 .
- E () a ozonólise completa de sua molécula produz duas moléculas de etanal e uma molécula de gás carbônico.

Gabarito: E

O penta-2,3-dieno é um dieno **cumulado**: as duas duplas partilham o carbono central. Essa geometria explica todas as alternativas.

Etapla 1. Escreva a estrutura e identifique as hibridizações.

A cadeia é $\text{CH}_3\text{--CH=C=CH--CH}_3$, com as duplas entre $\text{C}_2\text{--C}_3$ e $\text{C}_3\text{--C}_4$.

O carbono central faz duas ligações σ e duas π , sendo portanto **sp** . Os carbonos C_2 e C_4 são **sp^2** , e os das pontas, C_1 e C_5 , são **sp^3** .

São dois carbonos sp^2 , e não três.

Etapla 2. Verifique a geometria das duas ligações π .

O carbono central usa dois orbitais p **perpendiculares entre si**, um para cada ligação π . Os dois sistemas π não são paralelos e não se conjugam: não há sistema π estendido.

Pela mesma razão não há reação de Diels-Alder, que exige dieno **conjugado**. Ainda que houvesse, o produto seria um cicloalcano, não um cicloalcano.

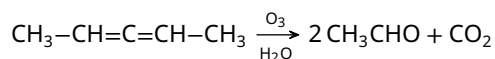
Etapla 3. Verifique a quiralidade.

Como os dois planos π são perpendiculares, os substituintes das pontas ficam em planos perpendiculares. Cada carbono terminal da cumulação carrega um H e um CH_3 , que são diferentes entre si.

Essa é a condição de **quiralidade axial** dos alenos: a molécula não tem plano de simetria e apresenta isomeria ótica, ao contrário do que diz a primeira alternativa.

Etapla 4. Faça a ozonólise completa.

A ozonólise rompe as duas duplas. Cada carbono terminal da cumulação, com seu CH_3 , vira um aldeído, e o carbono central, que não carrega hidrogênio nem substituinte, vira CO_2 :



São duas moléculas de etanal e uma de gás carbônico, o que confirma a alternativa (E).



Questão 36

Tendo em vista a tabela a seguir, acerca da primeira energia de ionização dos elementos do segundo período da Tabela Periódica:

Átomo	Energia de Ionização (kJ/mol)
Li	520
Be	899
B	801
C	1086
N	1402
O	1314
F	1681
Ne	2081

Pode-se afirmar que, com relação à primeira energia de ionização, a do:

- A () Lítio é a menor porque o seu raio atômico é o menor dentre os elementos do segundo período.
- B () Berílio é mais alta do que a do Boro, pois é mais difícil remover um elétron do orbital **2p** do que de um orbital **2s**.
- C () Oxigênio é mais baixa do que a do Nitrogênio porque, naquele, há repulsão intereletrônica de um par de elétrons no suborbital **2p**.
- D () Flúor é mais alta do que a do Oxigênio porque, naquele, há repulsão intereletrônica de dois pares de elétrons no suborbital **2p**.
- E () Neônio é a mais alta do seu Grupo pois se trata do gás nobre de maior raio atômico.

Gabarito: C

A energia de ionização cresce ao longo do período, mas a tabela mostra duas quebras: do berílio para o boro e do nitrogênio para o oxigênio. Cada alternativa é julgada pela configuração eletrônica do subnível de onde sai o elétron.

Etapla 1. Julgue a afirmação sobre o lítio.

O lítio tem, de fato, a menor energia de ionização do período, mas a justificativa está invertida: seu raio atômico é o **maior** do segundo período, não o menor. O elétron $2s^1$ está mais distante do núcleo e mais blindado, e por isso sai com facilidade.

Etapla 2. Julgue a afirmação sobre o berílio.

O valor está certo — $899 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$ contra $801 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$ do boro —, mas a razão está trocada. O berílio é $[\text{He}] 2s^2$ e o boro é $[\text{He}] 2s^2 2p^1$. O orbital $2p$ é mais energético e mais blindado que o $2s$, de modo que remover um elétron do $2p$ é **mais fácil**, e não mais difícil. É justamente isso que explica a queda do berílio para o boro.

Etapla 3. Julgue a afirmação sobre o oxigênio.

N : $[\text{He}] 2s^2 2p^3$ três orbitais $2p$ semipreenchidos

O : $[\text{He}] 2s^2 2p^4$ um dos orbitais $2p$ com par completo

No oxigênio, dois elétrons dividem o mesmo orbital $2p$ e se repelem. Essa repulsão facilita a saída de um deles, e a energia de ionização cai de $1402 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$ para $1314 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$, contrariando a tendência de crescimento ao longo do período.

A afirmação descreve exatamente esse efeito, e é a correta.

**Etapla 4.** Julgue as afirmações sobre o flúor e o neônio.

O flúor tem energia maior que a do oxigênio por causa da maior carga nuclear efetiva. A repulsão entre pares citada existe, e é ainda maior no flúor, mas ela **reduz** a energia de ionização: não pode ser a causa do aumento.

Quanto ao neônio, ele é o gás nobre de **menor** raio depois do hélio, e não o de maior. Além disso, o hélio tem energia de ionização mais alta que a dele, de modo que o neônio não é o maior do Grupo.

A única afirmação correta é a do **oxigênio**.

Questão 37

Assinale a única alternativa correta.

- A ()** O DNA é formado pelas bases nitrogenadas adenina, guanina, citosina e timina. As duas primeiras são purinas e as duas últimas são pirimidinas.
- B ()** Gorduras são uma fonte eficiente de armazenamento de energia porque seus átomos de carbono apresentam estados de oxidação mais altos que os átomos de carbono nos carboidratos e nas proteínas.
- C ()** Vitaminas hidrossolúveis tendem a se acumular no corpo, então consumi-las em excesso pode ser prejudicial.
- D ()** A celulose é um polímero cujo monômero é a frutose.
- E ()** Caseína, queratina e lignina são exemplos de proteínas.

Gabarito: A

Cada alternativa trata de uma classe de biomolécula, e basta um contraexemplo para descartar as incorretas.

Etapla 1. A

As quatro bases do DNA são adenina, guanina, citosina e timina. A classificação segue o esqueleto do anel:

purinas : adenina, guanina (anel duplo, imidazol fundido a pirimidina)

pirimidinas : citosina, timina (anel simples de seis membros)

A ordem em que o enunciado lista as bases coloca justamente as duas purinas primeiro e as duas pirimidinas depois. A afirmação está correta.

Etapla 2. B

O carbono das cadeias graxas está ligado quase só a hidrogênio e a outros carbonos, ou seja, em estado de oxidação **baixo**. Já os carboidratos trazem uma hidroxila por carbono, o que eleva esse estado.

É justamente por partir de um carbono mais **reduzido** que a gordura libera mais energia ao ser oxidada, cerca de 9 kcal/g contra 4 kcal/g dos carboidratos. A afirmação inverte a explicação.

Etapla 3. C

As hidrossolúveis, como as do complexo B e a vitamina C, são eliminadas pela urina e **não** se acumulam. Quem se acumula em tecido adiposo e no fígado são as lipossolúveis, A, D, E e K, cujo excesso é que pode ser tóxico.

Etapla 4. D

A celulose é um polímero de β -glicose unida por ligações glicosídicas β -1,4, e não de frutose.

Caseína e queratina são proteínas, mas a lignina é um polímero fenólico da parede celular vegetal, sem ligação peptídica.

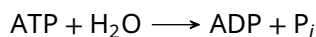
A única afirmação correta é a das **bases nitrogenadas**.

**Questão 38**

A variação da energia livre de Gibbs em condições não padrão é descrita pela equação:

$$\Delta G = \Delta G^\circ + RT \ln(Q)$$

A hidrólise do ATP pode ser representada por:



Considere uma célula a 25 °C, na qual as concentrações são mantidas constantes com os valores:

- $[\text{ATP}] = 1 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$
- $[\text{ADP}] = 1 \times 10^{-4} \text{ mol/L}$
- $[\text{P}_i] = 1 \times 10^{-2} \text{ mol/L}$

Dados:

- $\Delta G^\circ = -7,7 \times 10^3 \text{ cal/mol}$
- $R = 1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$
- $\ln(10) = 2,303$

Assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo de ΔG e a interpretação correta do processo:

- A** () $\Delta G = -3,61 \times 10^3 \text{ cal/mol}$; a reação encontra-se em equilíbrio.
- B** () $\Delta G = -1,18 \times 10^4 \text{ cal/mol}$; a reação é espontânea no sentido direto.
- C** () $\Delta G = +4,1 \times 10^3 \text{ cal/mol}$; a reação não é espontânea.
- D** () $\Delta G = -7,7 \times 10^3 \text{ cal/mol}$; a reação encontra-se em equilíbrio.
- E** () $\Delta G = 0$; as concentrações indicam que Q é igual à constante de equilíbrio K .

Gabarito: B

O quociente de reação mede o afastamento do equilíbrio. Calculado a partir das concentrações celulares, ele corrige a energia livre padrão e dá o valor que de fato vale dentro da célula.

Etapa 1. Escreva o quociente de reação.

A água é o solvente e não entra na expressão:

$$Q = \frac{[\text{ADP}] \cdot [\text{P}_i]}{[\text{ATP}]}$$

Etapa 2. Calcule Q com as concentrações da célula.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1 \times 10^{-4} \cdot 1 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{1 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-3}} \\ &= 1 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

O quociente é bem menor que 1: há muito mais ATP do que produtos, e a reação está longe do equilíbrio.

Etapa 3. Calcule o termo $RT \ln(Q)$.

Com $T = 298 \text{ K}$ e $\ln(1 \times 10^{-3}) = -3 \ln(10)$:

$$\begin{aligned}
 RT \ln(Q) &= 1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \cdot 298 \text{ K} \cdot (-3 \cdot 2,303) \\
 &\approx 592,1 \text{ cal/mol} \cdot (-6,909) \\
 &\approx -4,09 \times 10^3 \text{ cal/mol}
 \end{aligned}$$

Etapa 4. Some os dois termos.

$$\begin{aligned}
 \Delta G &= \Delta G^\circ + RT \ln(Q) \\
 &\approx -7,7 \times 10^3 \text{ cal/mol} + (-4,09 \times 10^3 \text{ cal/mol}) \\
 &\approx \boxed{-1,18 \times 10^4 \text{ cal/mol}}
 \end{aligned}$$

O valor é negativo, de modo que a hidrólise é espontânea no sentido direto. Não há equilíbrio: se houvesse, ΔG seria nulo e Q igualaria K .

A célula mantém Q muito abaixo de K justamente para que a hidrólise do ATP continue liberando energia livre.

Questão 39

Considere as reações a seguir:

- i. $\text{HCO}_3^- (\text{aq}) + \text{OH}^- (\text{aq}) \longrightarrow \text{CO}_3^{2-} (\text{aq}) + \text{H}_2\text{O} (\text{l})$
- ii. $\text{HCO}_3^- (\text{aq}) + \text{HF} (\text{aq}) \longrightarrow \text{H}_2\text{CO}_3 (\text{aq}) + \text{F}^- (\text{aq})$
- iii. $\text{BF}_3 (\text{g}) + (\text{CH}_3)_3\text{N} (\text{g}) \longrightarrow (\text{CH}_3)_3\text{N} \cdot \text{BF}_3 (\text{s})$
- iv. $[\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6]^{3+} (\text{aq}) + \text{SCN}^- (\text{aq}) \longrightarrow [\text{Fe}(\text{SCN})(\text{H}_2\text{O})_5]^{2+} (\text{aq}) + \text{H}_2\text{O} (\text{l})$

Sobre essas reações, analise as afirmativas:

- I. A teoria de Arrhenius classifica o HCO_3^- como ácido na reação i e como base na reação ii.
- II. A trimetilamina atua como base quando a reação iii é interpretada pela teoria de Brønsted-Lowry.
- III. A reação iv é uma reação ácido-base segundo a teoria de Lewis.

Está correto o que se afirma em:

- A** () I e III, apenas. **B** () II e III, apenas. **C** () I, apenas. **D** () II, apenas. **E** () III, apenas.

Gabarito: E

Cada teoria ácido-base tem um alcance próprio: Arrhenius exige água e íons H^+ ou OH^- , Brønsted-Lowry exige transferência de próton, e Lewis exige transferência de par eletrônico. As afirmativas são julgadas por esse alcance.

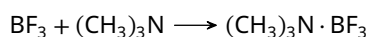
Etapa 1. Afirmativa I.

Arrhenius define ácido como a espécie que **libera H^+ em água** e base como a que **libera OH^- em água**.

Na reação i o HCO_3^- cede um próton, e na reação ii ele recebe um próton. O comportamento anfótero existe, mas quem o descreve é Brønsted-Lowry: pela definição de Arrhenius, o HCO_3^- não pode ser chamado de base, já que não libera OH^- . A afirmativa atribui a Arrhenius uma classificação fora do alcance da sua teoria, e é falsa.

Etapa 2. Afirmativa II.

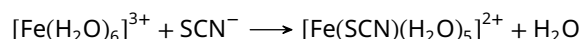
Na reação iii, o nitrogênio da trimetilamina cede seu par não ligante ao boro do BF_3 , formando o aduto:



Não há próton envolvido em nenhuma etapa. Sem transferência de próton, a teoria de Brønsted-Lowry não se aplica, e a trimetilamina só pode ser chamada de base no sentido de Lewis. A afirmativa é falsa.

**Etapa 3. Afirmativa III.**

Na reação iv, o íon tiocianato substitui uma molécula de água na esfera de coordenação do ferro:



O SCN^- cede um par eletrônico ao Fe^{3+} , que o recebe: o ligante é a base de Lewis e o cátion metálico é o ácido de Lewis. Toda formação de complexo é, nesse sentido, uma reação ácido-base de Lewis.

A afirmativa é verdadeira.

Questão 40

Três recipientes rígidos A , B e C , de volume V , $2V$ e $3V$, respectivamente, contêm uma mistura gasosa ideal formada por até três gases inertes X , Y , Z , à mesma temperatura. Inicialmente, os recipientes estão isolados entre si e possuem pressões totais P , $2P$ e $3P$, respectivamente. Além disso, desconhece-se as pressões parciais dos gases em cada recipiente. Após a abertura simultânea das válvulas que os interligam, e o estabelecimento do equilíbrio à mesma temperatura, as pressões parciais finais uniformes em todo o sistema são P_X , P_Y , P_Z .

Antes da abertura das válvulas, sabe-se que:

- i. o recipiente A não contém o gás Z .
- ii. o recipiente B não contém o gás Y .
- iii. o recipiente C não contém o gás X .

Indique qual das alternativas a seguir apresenta os limites estritamente aplicáveis ao processo, em termos de P_X , P_Y e P_Z .

A () $P/3 \leq P_X + P_Y \leq 5P/2$

B () $0 \leq P_X \leq 2P/3$

C () $2P/3 \leq P_X + P_Z \leq 7P/3$

D () $0 \leq P_Y \leq P/2$

E () $P/3 \leq P_Y + P_Z \leq 5P/3$

Gabarito: C

Como os gases são inertes e a temperatura não muda, cada recipiente contribui com uma quantidade de matéria proporcional ao produto de sua pressão pelo seu volume. Os limites saem de distribuir essas contribuições entre os gases que cada recipiente pode conter.

Etapa 1. Calcule a pressão total final.

A soma das contribuições, em unidades de PV , distribuída no volume total $6V$:

$$\begin{aligned} P_{\text{total}} \cdot 6V &= P \cdot V + 2P \cdot 2V + 3P \cdot 3V \\ &= PV + 4PV + 9PV \\ &= 14PV \end{aligned}$$

$$P_X + P_Y + P_Z = P_{\text{total}} = \frac{14PV}{6V} = \frac{7P}{3}$$

Esse é o teto de qualquer soma de pressões parciais, atingido quando o gás ausente da soma não existe no sistema.

Etapa 2. Identifique o que cada recipiente pode conter.

Das três informações do enunciado:

A : apenas X e Y	(contribui PV)
B : apenas X e Z	(contribui $4PV$)
C : apenas Y e Z	(contribui $9PV$)

Etapa 3. Determine os limites de $P_X + P_Z$.



Os gases X e Z recebem contribuição de A (só o X), de C (só o Z) e de **todo** o recipiente B , que não contém outro gás além desses dois.

O mínimo ocorre quando A é puro em Y e C é puro em Z , restando apenas a contribuição obrigatória de B :

$$(P_X + P_Z) \cdot 6V \geq 4PV \implies P_X + P_Z \geq \frac{2P}{3}$$

O máximo ocorre quando A é puro em X e C é puro em Z , de modo que o gás Y desaparece:

$$(P_X + P_Z) \cdot 6V \leq 14PV \implies P_X + P_Z \leq \frac{7P}{3}$$

$$\boxed{\frac{2P}{3} \leq P_X + P_Z \leq \frac{7P}{3}}$$

Etapla 4. Descarte as demais alternativas.

Pelo mesmo raciocínio, aplicado a cada soma:

$$P_X \in \left[0, \frac{5P}{6}\right] \quad (\text{de } A \text{ e } B)$$

$$P_Y \in \left[0, \frac{5P}{3}\right] \quad (\text{de } A \text{ e } C)$$

$$P_X + P_Y \in \left[\frac{P}{6}, \frac{7P}{3}\right] \quad (A \text{ inteiro é obrigatório})$$

$$P_Y + P_Z \in \left[\frac{3P}{2}, \frac{7P}{3}\right] \quad (C \text{ inteiro é obrigatório})$$

Nenhum desses intervalos coincide com o das alternativas correspondentes, que ora apertam o limite inferior, ora ultrapassam o superior.

Equipe de Química

Gabriel Braun - Coordenador Euler Gigante Francisco Markan Leonardo Remon Mayra Batista