

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Sejam (a_n) uma progressão aritmética e (b_n) uma progressão geométrica. Se a razão de (a_n) é r , $r \neq 0$, a razão de (b_n) é $q = 1/r$, $a_1 = b_1 = 4$ e

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{50}{3},$$

determine n de modo que a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica seja igual a -80 .

Gabarito

A soma dos cinco termos da PA determina sua razão. Com ela, obtém-se a razão da PG e o número de termos cuja soma é -80 .

Etapas 1. Determine a razão da PA.

Como $a_5 = a_1 + 4r$, a soma dada fornece

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} &= \frac{50}{3} \\ \frac{(8 + 4r) \cdot 5}{2} &= \frac{50}{3} \\ 4 + 2r &= \frac{10}{3} \\ r &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Etapas 2. Determine o número de termos da PG.

A razão da PG é $q = 1/r = -3$. Pela soma de seus n primeiros termos,

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ -80 &= 4 \frac{(-3)^n - 1}{-4} \\ (-3)^n &= 81. \end{aligned}$$

Portanto, o número de termos é

$$\boxed{n = 4}.$$

**Questão 2**

Quatro cidades A , B , C e D estão ligadas por seis pontes distintas da seguinte maneira:

- uma ponte liga A e B ;
- uma ponte liga A e C ;
- uma ponte liga B e C ;
- duas pontes ligam B e D ;
- uma ponte liga C e D .

Quantos caminhos são possíveis ligando todas as cidades e passando por todas as pontes uma única vez, sabendo que é permitido passar em uma mesma cidade mais de uma vez?

Gabarito

Cada passagem por uma cidade intermediária usa uma ponte de entrada e outra de saída. Assim, os extremos do percurso são C e D , as únicas cidades com número ímpar de pontes. A contagem parte de C e depois inclui os percursos inversos.

Etapla 1. Conte os percursos que fecham o triângulo CAB no início.

Há duas formas de voltar a C : $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ou $C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$. Em seguida, o percurso é $C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow D$. As duas pontes entre B e D podem ser usadas em duas ordens. Esse caso tem $2 \cdot 2 = 4$ percursos.

Etapla 2. Conte os percursos que começam por $C \rightarrow A \rightarrow B$ sem fechar o triângulo.

A próxima cidade é D , e há duas pontes disponíveis para chegar a ela. Depois, o percurso termina por $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ ou por $D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$. Esse caso tem $2 \cdot 2 = 4$ percursos.

Etapla 3. Conte os percursos que começam por $C \rightarrow D$.

Há duas pontes para seguir de D a B . O triângulo pode ser percorrido como $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ ou $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$. Resta então a outra ponte de B a D . Esse caso tem $2 \cdot 2 = 4$ percursos.

Etapla 4. Conte os percursos que começam por $C \rightarrow B \rightarrow D$.

Há duas escolhas para a ponte de B a D . Para cada uma, o percurso termina por $D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$ ou por $D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$. Esse caso também tem $2 \cdot 2 = 4$ percursos.

Etapla 5. Inclua os percursos no sentido inverso.

Os quatro casos somam 16 percursos de C a D . Cada um admite um percurso inverso, de D a C , contado separadamente. Portanto,

$$\begin{aligned} N &= 2(4 + 4 + 4 + 4) \\ &= \boxed{32}. \end{aligned}$$

Questão 3

Determine todos os valores reais de x para os quais

$$|\log_{1/2} |x|| + |\log_2 |x|| < 4.$$

**Gabarito**

A mudança de base transforma os dois logaritmos em expressões opostas. Seus módulos são iguais, o que reduz a inequação a uma condição sobre $|x|$.

Etapas 1. Escreva os logaritmos na base 2.

O domínio exige $x \neq 0$. Como a base $1/2$ é o inverso de 2,

$$\begin{aligned}\log_{1/2} |x| &= \frac{\log_2 |x|}{\log_2(1/2)} \\ &= -\log_2 |x|.\end{aligned}$$

Assim, a inequação equivale a $2|\log_2 |x|| < 4$.

Etapas 2. Resolva a inequação modular.

A função logarítmica de base 2 é crescente. Portanto,

$$\begin{aligned}|\log_2 |x|| &< 2 \\ -2 &< \log_2 |x| < 2 \\ \frac{1}{4} &< |x| < 4.\end{aligned}$$

Separando os valores positivos e negativos de x , obtém-se

$$S = \left(-4, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, 4\right).$$

Questão 4

Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica, dizemos que A é definida positiva se

$$X^T A X = [y], \quad y > 0,$$

para toda $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ que tem ao menos uma entrada não-nula. Encontre todos os possíveis valores de $b \in \mathbb{R}$ tais que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

seja definida positiva.

Gabarito

O produto $X^T A X$ é uma expressão quadrática nas entradas de X . Sua positividade pode ser verificada pelo discriminante, tratando separadamente o caso em que a segunda entrada é zero.

Etapas 1. Calcule o produto matricial.

Para $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, com $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, o produto fornece $X^T A X = [y]$, em que

$$y = x_1^2 + 2bx_1x_2 + x_2^2.$$

Se $x_2 = 0$, então $x_1 \neq 0$ e $y = x_1^2 > 0$, independentemente de b .

Etapla 2. Imponha a positividade quando $x_2 \neq 0$.

Fixado $x_2 \neq 0$, a expressão é um trinômio em x_1 com coeficiente líder positivo. Ela é positiva para todo x_1 se, e somente se, seu discriminante é negativo:

$$\begin{aligned}\Delta &= (2bx_2)^2 - 4x_2^2 \\ &= 4x_2^2(b^2 - 1).\end{aligned}$$

Como $x_2^2 > 0$, a condição $\Delta < 0$ equivale a $b^2 < 1$. Logo,

$$\boxed{-1 < b < 1}.$$

Questão 5

Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 14$, sabendo que vale a relação $p(1+x) = p(1-x)$, para todo $x \in \mathbb{C}$.

Gabarito

A simetria indicada no enunciado sugere escrever o polinômio em potências de $x - 1$. Também é possível obter as mesmas raízes pela fatoração em dois polinômios quadráticos.

Etapla 1. Reescreva o polinômio em potências de $x - 1$.

Agrupando os termos, obtém-se

$$p(x) = (x - 1)^4 + 3(x - 1)^2 - 18.$$

Com $y = (x - 1)^2$, a equação $p(x) = 0$ se torna

$$\begin{aligned}y^2 + 3y - 18 &= 0 \\ (y - 3)(y + 6) &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $(x - 1)^2 = 3$ ou $(x - 1)^2 = -6$. As raízes são

$$\begin{aligned}x &= 1 \pm \sqrt{3} \\ \text{ou } x &= 1 \pm i\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Etapla 2. Obtenha as raízes também por fatoração.

Na segunda resolução, procura-se uma fatoração da forma

$$p(x) = (x^2 - ax - 2)(x^2 - bx + 7).$$

Comparando os coeficientes de x^3 e de x , segue que

$$\begin{aligned}a + b &= 4 \\ -7a + 2b &= -10.\end{aligned}$$

O sistema dá $a = b = 2$. O coeficiente de x^2 também confere, pois $ab + 5 = 9$. Assim,

$$p(x) = (x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x + 7).$$

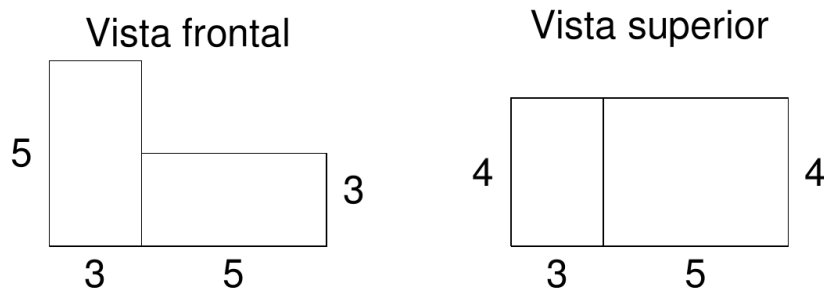
Resolvendo as duas equações quadráticas, encontram-se novamente

$$\begin{aligned}x &= 1 \pm \sqrt{3} \\ \text{ou } x &= 1 \pm i\sqrt{6}.\end{aligned}$$



Questão 6

O sólido S é formado pela união de dois paralelepípedos retângulos congruentes, com posição e medidas conforme a figura.



Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta completamente contido em S que contém um dos vértices de S . Encontre o maior valor possível de $m(\overline{AB})$.

Gabarito

A maior distância pode ser comparada pelas projeções dos segmentos na vista frontal. A diferença máxima de profundidade é 4; a semelhança de triângulos determina quais segmentos atravessam o degrau sem sair do sólido.

Etapla 1. Calcule a diagonal da parte inferior.

A parte de altura 3 forma um paralelepípedo de dimensões 8, 4 e 3. Sua diagonal, denotada por AM , mede

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{8^2 + 4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{89}. \end{aligned}$$

Etapla 2. Calcule o segmento que parte do vértice inferior direito.

Na vista frontal, tome a origem no vértice inferior esquerdo, o eixo horizontal para a direita e o vertical para cima. A projeção de I é $(8, 0)$ e a de O é $(0, h)$. Para que IO seja o mais longo possível sem sair do sólido, sua projeção deve passar pelo canto interno $(3, 3)$.

Os triângulos retângulos têm bases 5 e 8 e alturas 3 e h . Pela semelhança,

$$\begin{aligned} \frac{3}{h} &= \frac{5}{8} \\ h &= \frac{24}{5} \\ &= 4,8. \end{aligned}$$

Escolhendo I e O em faces opostas na direção da profundidade, obtém-se

$$\begin{aligned} IO &= \sqrt{8^2 + 4^2 + (4,8)^2} \\ &= \sqrt{103,04}. \end{aligned}$$

Etapla 3. Compare com o segmento que parte do vértice superior esquerdo.

O outro candidato que atravessa o degrau parte de $(0, 5)$ e passa por $(3, 3)$. Se sua projeção alcança a base em $(d, 0)$, a semelhança fornece

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &= \frac{3}{d} \\ d &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Seu comprimento máximo é $\sqrt{(15/2)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{97,25}$. Os segmentos contidos em apenas um dos blocos são menores que esses candidatos. Como $103,04 > 97,25 > 89$, a maior distância é

$$m(\overline{AB})_{\max} = \sqrt{103,04}.$$

**Questão 7**

Determine a equação da circunferência de maior raio que é tangente ao eixo y e passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(3, 6)$.

Gabarito

A tangência ao eixo y relaciona o raio à abscissa do centro. A passagem pelos dois pontos determina as duas circunferências possíveis, das quais se escolhe a de maior raio.

Etapla 1. Escreva as condições para o centro e o raio.

Como a circunferência passa por pontos com abscissas positivas e é tangente ao eixo y , seu centro é (R, b) , com $R > 0$. Sua equação é

$$(x - R)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Substituindo os dois pontos e simplificando, obtém-se

$$2R = b^2 - 8b + 17$$

$$6R = b^2 - 12b + 45.$$

Etapla 2. Determine as duas circunferências.

Eliminando R entre as equações,

$$3(b^2 - 8b + 17) = b^2 - 12b + 45$$

$$b^2 - 6b + 3 = 0$$

$$b = 3 \pm \sqrt{6}.$$

Como $b^2 = 6b - 3$, a primeira equação dá

$$R = \frac{b^2 - 8b + 17}{2}$$

$$= 7 - b$$

$$= 4 \mp \sqrt{6}.$$

Etapla 3. Escolha o maior raio.

O maior raio é $4 + \sqrt{6}$, correspondente a $b = 3 - \sqrt{6}$. Portanto,

$$(x - 4 - \sqrt{6})^2 + (y - 3 + \sqrt{6})^2 = (4 + \sqrt{6})^2.$$

Questão 8

Considere a parábola de equação $y = 4x - x^2$ com vértice no ponto V . Seja T o trapézio $PABV$, onde $P = (0, 0)$, A é um ponto com abscissa no intervalo $[2, 4]$ e ordenada nula e B é um ponto na parábola com ordenada positiva. Sabendo que $m(\overline{AB}) = \frac{7}{8}\sqrt{5}$, determine a área de T .

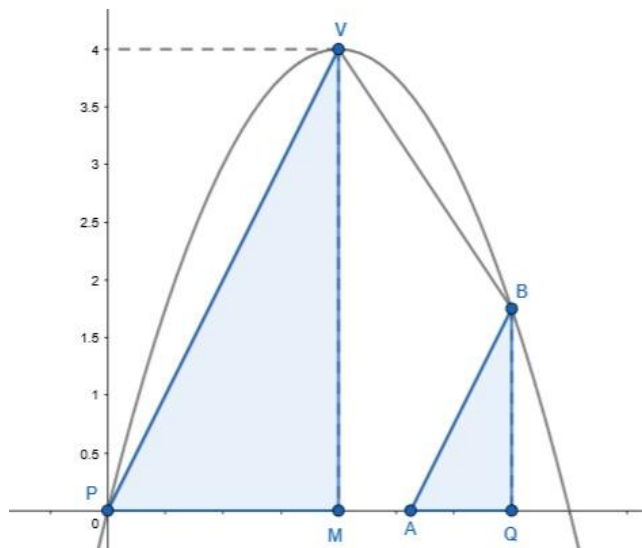
Gabarito

A semelhança de triângulos fornece as coordenadas de A e B . Com os quatro vértices conhecidos, a área pode ser calculada pela soma dos produtos das coordenadas consecutivas.

Etapla 1. Determine as bases paralelas do trapézio.



O vértice da parábola é $V = (2, 4)$. Como PA é horizontal e $B \neq V$, os lados paralelos são PV e AB . Sejam M e Q as projeções de V e B no eixo x .



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo PVM ,

$$PV^2 = 2^2 + 4^2$$

$$PV = 2\sqrt{5}.$$

Etapla 2. Use a semelhança para localizar A e B .

A razão entre os lados correspondentes de ABQ e PVM é

$$\begin{aligned}\frac{AB}{PV} &= \frac{7\sqrt{5}/8}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{7}{16}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}y_B &= 4 \cdot \frac{7}{16} \\ &= \frac{7}{4} \\ x_B - x_A &= 2 \cdot \frac{7}{16} \\ &= \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Como B pertence à parábola,

$$\begin{aligned}\frac{7}{4} &= 4x_B - x_B^2 \\ x_B &= \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

A primeira raiz daria $x_A = -3/8$, fora do intervalo permitido. Logo, $x_B = 7/2$ e

$$\begin{aligned}x_A &= x_B - \frac{7}{8} \\ &= \frac{7}{2} - \frac{7}{8} \\ &= \frac{21}{8}.\end{aligned}$$

Etapla 3. Calcule a área pelas coordenadas dos vértices.

Na ordem P, V, B, A , os vértices são $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(7/2, 7/4)$ e $(21/8, 0)$. A soma orientada dos produtos fornece

$$\begin{aligned}
 2S &= \left| 2 \cdot \frac{7}{4} - 4 \cdot \frac{7}{2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{21}{8} \right| \\
 &= \left| \frac{7}{2} - 14 - \frac{147}{32} \right| \\
 &= \frac{483}{32}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$S = \frac{483}{64}.$$

Questão 9

Seja $z = 1 + ai$ uma raiz do polinômio $p(x) = x^4 + 10x^2 + mx + 29$, onde a e m são números reais. Determine a área do quadrilátero cujos vértices são as quatro raízes complexas de $p(x)$ no plano de Argand-Gauss.

Gabarito

A resolução considera $1 + ai$ uma raiz não real, como faz o gabarito da Pensi. Os pares conjugados e as relações de Girard determinam as bases de um trapézio no plano complexo.

Etapa 1. Relacione as quatro raízes.

Sob a hipótese $a \neq 0$, $1 - ai$ é uma segunda raiz. Sejam r_1 e r_2 as demais. A soma das raízes e a soma dos produtos duas a duas dão

$$\begin{aligned}
 r_1 + r_2 &= -2 \\
 r_1 r_2 + 2(r_1 + r_2) + 1 + a^2 &= 10 \\
 r_1 r_2 &= 13 - a^2.
 \end{aligned}$$

O produto das quatro raízes fornece outra expressão:

$$\begin{aligned}
 (1 + a^2)r_1 r_2 &= 29 \\
 r_1 r_2 &= \frac{29}{1 + a^2}.
 \end{aligned}$$

Etapa 2. Determine os módulos das partes imaginárias.

Igualando as duas expressões de $r_1 r_2$,

$$\begin{aligned}
 \frac{29}{1 + a^2} &= 13 - a^2 \\
 a^4 - 12a^2 + 16 &= 0 \\
 (a^2 - 6)^2 &= 20 \\
 a^2 &= 6 \pm 2\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

As outras raízes têm soma -2 e produto $7 \mp 2\sqrt{5}$. O discriminante de sua equação quadrática é negativo em ambos os casos. Portanto, elas podem ser escritas como $-1 + bi$ e $-1 - bi$, com

$$\begin{aligned}
 1 + b^2 &= 13 - a^2 \\
 b^2 &= 6 \mp 2\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Como $6 \pm 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} \pm 1)^2$, os valores de $|a|$ e $|b|$ são $\sqrt{5} + 1$ e $\sqrt{5} - 1$, em alguma ordem.

Etapa 3. Calcule a área do trapézio.

As bases verticais medem $2|a|$ e $2|b|$, e a distância entre elas é 2. Logo,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{(2|a| + 2|b|) \cdot 2}{2} \\
 &= 2[(\sqrt{5} + 1) + (\sqrt{5} - 1)] \\
 &= \boxed{4\sqrt{5}}.
 \end{aligned}$$

Esse resultado depende da interpretação $a \neq 0$. O enunciado não a explicita: para $a = 0$, $m = -40$ também torna 1 uma raiz, e a construção por dois pares conjugados distintos deixa de valer.

Questão 10

Sabendo que $\tan(\alpha + \beta) = -2$ e $\sin(\alpha) = (4 - \sqrt{5})\sin(\beta)$ para $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, calcule

$$\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

Gabarito

A fórmula da tangente do arco duplo determina a tangente da semissoma. A relação entre os senos fornece a razão pedida e, em seguida, a tangente da semidiferença.

Etapa 1. Calcule a tangente da semissoma.

Seja $t = \tan((\alpha + \beta)/2)$. Pela fórmula do arco duplo,

$$\begin{aligned}
 \frac{2t}{1 - t^2} &= -2 \\
 t^2 - t - 1 &= 0 \\
 t &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

Como $0 < (\alpha + \beta)/2 < \pi/2$, tem-se $t > 0$. Assim,

$$\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Etapa 2. Calcule a razão entre as tangentes.

Denote por $u = (\alpha - \beta)/2$ e $v = (\alpha + \beta)/2$ os dois ângulos. As fórmulas de transformação de produto em soma dão

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan u}{\tan v} &= \frac{\sin u \cos v}{\cos u \sin v} \\
 &= \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} \\
 &= \frac{(4 - \sqrt{5}) - 1}{(4 - \sqrt{5}) + 1} \\
 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \\
 &= \boxed{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.
 \end{aligned}$$

Etapa 3. Calcule a tangente da semidiferença.

Multiplicando a razão encontrada pela tangente da semissoma,



$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) &= \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}.\end{aligned}$$