

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Encontre os valores reais a e b tais que o polinômio $p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1$, ao ser dividido por $x^2 - x + 1$, deixe resto $2x + 1$.

Gabarito

A substituição de uma raiz complexa do divisor elimina o quociente da divisão. A igualdade entre as partes real e imaginária fornece um sistema para a e b .

Etapa 1. Substitua uma raiz do divisor.

Pela identidade da divisão, existe um polinômio $Q(x)$ tal que

$$p(x) = Q(x)(x^2 - x + 1) + 2x + 1.$$

Considere $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, uma raiz de $x^2 - x + 1$. Como $z^3 = -1$ e $z^6 = 1$, as potências se reduzem a

$$\begin{aligned} z^{57} &= -1, \\ z^{14} &= z^2, \\ z^7 &= z. \end{aligned}$$

Assim, a identidade da divisão em z dá $az^2 + bz = 2z + 1$.

Etapa 2. Iguale as partes real e imaginária.

Como a e b são reais, a parte real fornece

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} &= 2, \\ b - a &= 4. \end{aligned}$$

A parte imaginária fornece

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b &= \sqrt{3}, \\ a + b &= 2. \end{aligned}$$

Etapa 3. Resolva o sistema.

Somando as duas equações, obtém-se $2b = 6$. Substituindo $b = 3$ em $a + b = 2$, conclui-se que

$$a = -1, \quad b = 3.$$

**Questão 2**

Seja E uma elipse com eixo focal no eixo O_x do sistema de coordenadas cartesiano. O centro de E é o ponto $(r, 0)$, com $r > 0$, sua excentricidade é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e seu semieixo maior mede $\sqrt{2}$. Considerando os pontos $(x, y) \in E$, determine o valor de r para que $\frac{y}{x}$ tenha valor máximo igual a 1.

Gabarito

A equação da elipse permite impor a tangência da reta $y = x$. Essa reta deve representar o maior valor da razão y/x .

Etapla 1. Determine a equação da elipse.

A excentricidade é c/a , com $a = \sqrt{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}c &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \\&= 1, \\b^2 &= a^2 - c^2 \\&= 2 - 1 \\&= 1.\end{aligned}$$

Como o centro é $(r, 0)$ e o eixo maior é horizontal, a equação é

$$\frac{(x-r)^2}{2} + y^2 = 1.$$

Etapla 2. Imponha a tangência de $y = x$.

Substituindo $y = x$ na equação da elipse, obtém-se

$$\begin{aligned}(x-r)^2 + 2x^2 &= 2, \\3x^2 - 2rx + r^2 - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Na tangência, essa equação tem uma única raiz. Portanto, seu discriminante deve ser nulo:

$$\begin{aligned}4r^2 - 12(r^2 - 2) &= 0, \\8r^2 &= 24, \\r^2 &= 3.\end{aligned}$$

Como $r > 0$, segue que

$$\boxed{r = \sqrt{3}}.$$

Esse valor satisfaz $r > \sqrt{2}$, de modo que toda a elipse está em $x > 0$. A reta tangente $y = x$ limita a elipse por cima e, por isso, o máximo de y/x é 1.

Questão 3

Sejam $\alpha, \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tais que

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \sin(\alpha) - 2\sin(\beta) + \cos(\beta) = \frac{3}{4}.$$

Calcule o valor de $\sin(\alpha + \beta)$.

Gabarito

A subtração das equações determina uma relação entre o seno e o cosseno de β . O intervalo dos ângulos fixa os sinais necessários para calcular o seno da soma.

Etapas 1. Determine o seno e o cosseno de β .

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se

$$\cos \beta - \sin \beta = \frac{1}{2}.$$

Defina $s = \sin \beta$. Como $\cos \beta = s + 1/2$, a identidade trigonométrica fornece

$$1 - s^2 = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$1 - s^2 = s^2 + s + \frac{1}{4},$$

$$8s^2 + 4s - 3 = 0,$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}.$$

No intervalo dado, $\cos \beta \leq 0$. Assim, deve-se escolher o sinal negativo:

$$\sin \beta = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4},$$

$$\cos \beta = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}.$$

Etapas 2. Determine o seno e o cosseno de α .

A primeira equação do enunciado fornece o seno de α :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{7}}{4}. \end{aligned}$$

Como $\cos \alpha \leq 0$ no intervalo dado, a identidade trigonométrica dá

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \frac{7}{16}} \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Etapas 3. Calcule o seno da soma.

Pela fórmula de adição,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \\ &\quad + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{7 - \sqrt{7}}{16} \\ &\quad + \frac{3 + 3\sqrt{7}}{16} \\ &= \boxed{\frac{5 + \sqrt{7}}{8}}. \end{aligned}$$



Questão 4

Seja ABC um triângulo de lados $m(\overline{AB}) = 6$, $m(\overline{AC}) = 10$ e $m(\overline{BC}) = 14$. Calcule o raio da circunferência externa ao triângulo ABC que tangencia simultaneamente o segmento $\overline{BC}$ e as retas suportes AB e AC .

Gabarito

A circunferência pedida é a ex-inscrita relativa ao vértice A . Seu raio pode ser calculado pela área do triângulo e pelo semiperímetro.

Etapa 1. Calcule a área pela fórmula de Heron.

Defina $a = 14$, $b = 10$ e $c = 6$. O semiperímetro é

$$\begin{aligned} p &= \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{14 + 10 + 6}{2} \\ &= 15. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Heron, a área vale

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{15 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9} \\ &= 15\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Etapa 2. Determine o raio ex-inscrito.

A área e o raio r_a se relacionam por $S = r_a(p - a)$. Portanto,

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{S}{p - a} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{15 - 14} \\ &= \boxed{15\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Questão 5

Usando as aproximações $\log_{10} 2 = 0,3010$, $\log_{10} 3 = 0,4771$ e $\log_{10} 7 = 0,8450$, determine o primeiro algarismo (da esquerda para a direita) do resultado de 3^{100} .

Gabarito

O logaritmo de 3^{100} separa a potência de dez que determina sua ordem de grandeza do fator que determina seu primeiro algarismo. Esse fator pode ser limitado por logaritmos ou por potências.

Etapa 1. Separe a potência de dez.

Usando a aproximação fornecida,

$$\begin{aligned} \log_{10}(3^{100}) &= 100 \log_{10} 3 \\ &\approx 100 \cdot 0,4771 \\ &= 47,71. \end{aligned}$$

Assim, $3^{100} \approx 10^{47} \cdot 10^{0,71}$. Basta localizar $10^{0,71}$ entre dois inteiros consecutivos.

**Etapla 2. Solução 1: compare os logaritmos de 5 e 6.**

Os logaritmos fornecidos permitem calcular

$$\begin{aligned}\log_{10} 5 &= 1 - \log_{10} 2 \\ &\approx 1 - 0,3010 \\ &= 0,6990, \\ \log_{10} 6 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &\approx 0,3010 + 0,4771 \\ &= 0,7781.\end{aligned}$$

Como $\log_{10} 5 < 0,71 < \log_{10} 6$, segue que $5 < 10^{0,71} < 6$. O primeiro algarismo é, portanto, 5.

Etapla 3. Solução 2: compare potências.

Também é possível usar os limites

$$10^{0,7} < 10^{0,71} < 10^{0,75}.$$

O limite inferior é maior que 5, pois $2^7 > 5^3$ implica $10^7 > 5^{10}$. O limite superior é menor que 6, pois $10^3 < 6^4$. Logo, $5 < 10^{0,71} < 6$, e o primeiro algarismo é novamente 5. O valor de $\log_{10} 7$ não é necessário.

Questão 6

Uma moeda não viciada é lançada n vezes. Encontre os valores de n que maximizam a probabilidade de sair cara pela quarta vez exatamente no n -ésimo lançamento.

Gabarito

A quarta cara deve ocorrer no último lançamento, depois de exatamente três caras. A probabilidade desse evento pode ser comparada à dos valores vizinhos de n .

Etapla 1. Escreva a probabilidade do evento.

Para $n \geq 4$, escolhem-se as três caras entre os primeiros $n-1$ lançamentos. Cada sequência de n resultados tem probabilidade 2^{-n} , de modo que

$$p(n) = \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{3}.$$

Etapla 2. Compare probabilidades consecutivas.

A condição $p(n) \geq p(n+1)$ equivale a

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{3} &\geq \frac{1}{2} \binom{n}{3}, \\ n-3 &\geq \frac{n}{2}, \\ n &\geq 6.\end{aligned}$$

Para $n \geq 5$, a condição $p(n) \geq p(n-1)$ equivale a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \binom{n-1}{3} &\geq \binom{n-2}{3}, \\ \frac{n-1}{2} &\geq n-4, \\ n &\leq 7.\end{aligned}$$

Portanto, a sequência cresce até $n = 6$, mantém o mesmo valor em $n = 7$ e depois decresce.

**Etapla 3.** Calcule a probabilidade máxima.

Nos dois valores candidatos,

$$\begin{aligned}p(6) &= \frac{\binom{5}{3}}{2^6} \\&= \frac{10}{64} \\&= \frac{5}{32}, \\p(7) &= \frac{\binom{6}{3}}{2^7} \\&= \frac{20}{128} \\&= \frac{5}{32}.\end{aligned}$$

Assim, os valores que maximizam a probabilidade são

$$n = 6 \text{ ou } n = 7.$$

Questão 7

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + b$. Determine os valores reais a e b , sabendo que:

- I. $p(x)$ tem uma raiz real dupla;
- II. Os pontos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ e $(0, b)$ são vértices de um triângulo retângulo, em que x_1 e x_2 são raízes distintas de $p(x)$.

Gabarito

O teorema de Pitágoras relaciona as raízes distintas ao termo independente. As relações de Girard incorporam a raiz dupla e permitem determinar os coeficientes.

Etapla 1. Aplique o teorema de Pitágoras.

Como os três pontos formam um triângulo, $b \neq 0$. Nenhuma raiz é nula, pois $p(0) = b$. Assim, o ângulo reto só pode estar em $(0, b)$, e o lado sobre o eixo Ox é a hipotenusa.

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 &= x_1^2 + b^2 + x_2^2 + b^2, \\-2x_1x_2 &= 2b^2, \\x_1x_2 &= -b^2.\end{aligned}$$

Etapla 2. Use as relações de Girard.

Seja x_1 a raiz dupla. As três raízes são x_1 , x_1 e x_2 , de modo que

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= -a, \\x_1^2 + 2x_1x_2 &= 0, \\x_1^2x_2 &= -b.\end{aligned}$$

Substituindo $x_1x_2 = -b^2$ nas duas últimas equações, obtém-se

$$\begin{aligned}x_1^2 &= 2b^2, \\-x_1b^2 &= -b, \\bx_1 &= 1.\end{aligned}$$

Logo, x_1 e b têm o mesmo sinal.



Etapa 3. Determine os pares de coeficientes.

A condição de sinal dá $x_1 = \sqrt{2}b$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sqrt{2}b^2 &= 1, \\ b^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ b &= \pm \frac{\sqrt[4]{8}}{2}.\end{aligned}$$

De $x_1x_2 = -b^2$, segue que $x_2 = -b/\sqrt{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}a &= -2x_1 - x_2 \\ &= -2\sqrt{2}b + \frac{b}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2}b.\end{aligned}$$

Os sinais dos coeficientes são opostos:

$$a = \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad b = \pm \frac{\sqrt[4]{8}}{2}.$$

Questão 8

Seja $A_k = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem k , em que $a_{ij} = \max\{i, j\}$ para todo i, j em $\{1, 2, \dots, k\}$. Determine

$$\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k).$$

Gabarito

Operações entre linhas transformam a matriz em uma matriz triangular sem alterar seu determinante. Depois, os determinantes podem ser somados aos pares.

Etapa 1. Triangularize a matriz.

Pela definição das entradas,

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 2 & 2 & 3 & \dots & k \\ 3 & 3 & 3 & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & k & \dots & k \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema de Jacobi, subtrair uma linha de outra não altera o determinante. Efetue $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ na ordem $i = 1, 2, \dots, k-1$. A linha subtraída ainda está em sua forma original em cada operação. O resultado é

$$\det A_k = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & k & \dots & k \end{vmatrix}.$$

Como a matriz é triangular, o determinante é o produto das entradas da diagonal:

$$\det A_k = k(-1)^{k-1}.$$

A expressão também vale para $k = 1$.

Etapla 2. Some os determinantes aos pares.

Cada par consecutivo contribui com $(2j - 1) - 2j = -1$. Há 1012 pares e o último termo é 2025:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2025} \det A_k &= \sum_{j=1}^{1012} [(2j - 1) - 2j] + 2025 \\ &= -1012 + 2025 \\ &= \boxed{1013}.\end{aligned}$$

Questão 9

Determine a quantidade de matrizes 5×5 invertíveis e com entradas inteiras que satisfazem a propriedade $A^{-1} = A^T$.

Gabarito

A igualdade $AA^T = I$ impõe que as linhas tenham norma unitária e sejam ortogonais entre si. Como as entradas são inteiras, isso restringe as posições e os sinais das entradas não nulas.

Etapla 1. Determine as entradas de cada linha.

As entradas da diagonal de $AA^T = I$ fornecem, para cada linha i ,

$$\sum_{k=1}^5 a_{ik}^2 = 1.$$

Cada parcela é um inteiro não negativo. Portanto, cada linha tem exatamente uma entrada igual a 1 ou -1 e quatro entradas nulas.

Etapla 2. Determine as posições nas colunas.

Para duas linhas distintas, as entradas fora da diagonal de $AA^T = I$ fornecem

$$\sum_{k=1}^5 a_{ik}a_{jk} = 0.$$

Se a entrada não nula da linha i está na coluna k , essa igualdade se reduz a $a_{ik}a_{jk} = 0$. Como $a_{ik} \neq 0$, resulta $a_{jk} = 0$. Assim, cada coluna também tem exatamente uma entrada não nula.

Etapla 3. Conte as matrizes.

As posições das cinco entradas não nulas podem ser escolhidas de $5!$ maneiras. Cada uma admite dois sinais, independentemente das demais. Logo,

$$\begin{aligned}N &= 5! \cdot 2^5 \\ &= 120 \cdot 32 \\ &= \boxed{3840}.\end{aligned}$$

Questão 10

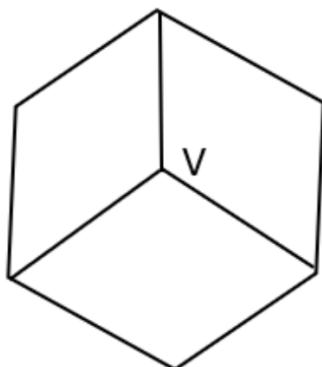
Calcule a área da projeção ortogonal de um cubo de aresta 2 sobre um plano perpendicular a uma das diagonais do cubo.

**Gabarito**

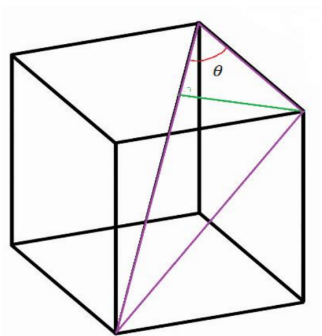
A projeção do cubo na direção de uma diagonal principal é um hexágono regular. Seu lado é a projeção de uma aresta do cubo sobre o plano.

Etapa 1. Identifique a projeção e seu lado.

Com a diagonal principal na vertical, a vista superior é



O lado do hexágono tem o mesmo comprimento que a projeção de uma aresta que parte de V . Esse comprimento corresponde ao segmento verde na figura a seguir.



Etapa 2. Calcule o ângulo entre a diagonal e a aresta.

Por Pitágoras, a diagonal principal mede $2\sqrt{3}$ e a diagonal de uma face mede $2\sqrt{2}$. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo destacado em roxo,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{12 + 4 - 8}{8\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Como θ é agudo, seu seno é

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

Etapa 3. Determine a área do hexágono.

A projeção da aresta tem comprimento

$$\begin{aligned}L &= 2 \sin \theta \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

O hexágono é formado por seis triângulos equiláteros de lado L . Portanto,



$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= 6 \cdot \frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= \boxed{4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$