

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

Considere um octaedro regular, centrado na origem, com três vértices em $(5, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ e $(0, 0, 5)$. Quantos pontos, no interior e na superfície desse sólido, possuem todas as coordenadas inteiras?

Gabarito

Os pontos do octaedro satisfazem $|x| + |y| + |z| \leq 5$. A contagem pode ser dividida conforme o número de coordenadas nulas, considerando separadamente os sinais das demais.

Etapla 1. Conte os pontos com três coordenadas não nulas.

No primeiro octante, as coordenadas são inteiras positivas. Fazendo $x' = x - 1$, $y' = y - 1$ e $z' = z - 1$, a condição passa a ser $x' + y' + z' \leq 2$. Com uma variável auxiliar $w \geq 0$, basta contar as soluções inteiras não negativas de

$$x' + y' + z' + w = 2.$$

A combinação com repetição fornece $\binom{5}{2} = 10$ soluções. Cada uma admite oito escolhas de sinais:

$$N_3 = 10 \cdot 2^3 = 80.$$

Etapla 2. Conte os pontos com coordenadas nulas.

A origem é o único ponto com três coordenadas nulas. Com apenas uma coordenada não nula, há três posições, cinco módulos e dois sinais:

$$N_1 = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30.$$

Com exatamente uma coordenada nula, suponha inicialmente $x = 0$ e $y, z > 0$. A condição $y + z \leq 5$ equivale a $y' + z' + f = 3$, com as três variáveis não negativas. Há $\binom{5}{2} = 10$ soluções. Considerando a posição do zero e os sinais:

$$N_2 = 10 \cdot 3 \cdot 2^2 = 120.$$

Etapla 3. Some os casos.

Como os grupos são disjuntos, o total de pontos é

$$\begin{aligned} N &= 80 + 1 + 30 + 120 \\ &= \boxed{231}. \end{aligned}$$

**Questão 2**

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que a entrada na primeira linha e na terceira coluna de A^n seja maior que 119.

Gabarito

As primeiras potências de A sugerem uma expressão para a entrada procurada. A indução confirma essa expressão e permite determinar o menor expoente.

Etapa 1. Identifique o padrão das potências.

A multiplicação de matrizes fornece

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O padrão sugere, para $k \geq 1$,

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k^2 + 3k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Etapa 2. Confirme a expressão por indução.

A fórmula vale para $k = 1$. Admitindo que valha para k , a entrada na primeira linha e terceira coluna de $A^k A$ é

$$\begin{aligned} (A^{k+1})_{13} &= 2 + k + \frac{k^2 + 3k}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2 + 3(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

As entradas $(1, 2)$ e $(2, 3)$ passam a ser $k + 1$, e as demais conservam o padrão. Isso conclui a indução.

Etapa 3. Determine o menor expoente.

A entrada procurada deve satisfazer

$$\begin{aligned} \frac{n(n+3)}{2} &> 119, \\ n^2 + 3n - 238 &> 0, \\ (n-14)(n+17) &> 0. \end{aligned}$$

Como n é natural, tem-se $n > 14$. Portanto, o menor valor é $n = 15$.



Questão 3

As diagonais do paralelogramo $ABCD$ estão contidas nas retas $r : 2y - x = 2$ e $s : x + 2y = 8$. As retas r e s se encontram no ponto X . Sabendo que $C = (8, 5)$ e que a equação da circunferência inscrita no triângulo ABX é

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

determine a área de $ABCD$.

Gabarito

A interseção das diagonais determina o vértice A . As tangentes à circunferência permitem localizar B e, pela simetria do paralelogramo, obter D e calcular a área.

Etapla 1. Determine a interseção das diagonais e o vértice A .

As coordenadas de X satisfazem

$$\begin{cases} x - 2y = -2, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$$

Assim, $X = (3, \frac{5}{2})$. Como as diagonais se cortam ao meio,

$$\begin{aligned} A &= 2X - C \\ &= (6, 5) - (8, 5) \\ &= (-2, 0). \end{aligned}$$

Etapla 2. Encontre a tangente que contém AB .

Uma reta não vertical por A tem equação $mx - y + 2m = 0$. Para ser tangente, a distância ao centro $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ deve ser igual ao raio $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{|m/2 - 5/2 + 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ |5m - 5| &= \sqrt{5m^2 + 5}, \\ 2m^2 - 5m + 2 &= 0. \end{aligned}$$

As raízes são $m = \frac{1}{2}$ e $m = 2$. A primeira corresponde à diagonal r ; a segunda fornece $AB : y = 2x + 4$. A reta vertical por A não é tangente, pois sua distância ao centro é $\frac{5}{2}$.

Etapla 3. Determine os vértices B e D .

O vértice B está em AB e na diagonal s . Logo,

$$\begin{cases} 2x - y = -4, \\ x + 2y = 8, \end{cases}$$

o que fornece $B = (0, 4)$. Como X é o ponto médio de BD ,

$$\begin{aligned} D &= 2X - B \\ &= (6, 5) - (0, 4) \\ &= (6, 1). \end{aligned}$$

Etapla 4. Calcule a área pelas coordenadas dos vértices.

Na ordem A, B, C, D , as somas dos produtos cruzados são

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \\
 &= 0, \\
 S_2 &= 0 \cdot 0 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot (-2) \\
 &= 60.
 \end{aligned}$$

A área do paralelogramo é

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{|S_1 - S_2|}{2} \\
 &= \boxed{30}.
 \end{aligned}$$

Questão 4

Um alvo é pintado em uma parede, composto de um círculo central e uma sequência de anéis concêntricos de cores alternadas entre vermelho e branco. O círculo central, pintado de vermelho, tem raio a unidades. Cada círculo subsequente tem raio uma unidade maior que o anterior: $a + 1$, depois $a + 2$ e assim por diante. Determine a área total em vermelho em função de a , sabendo que o alvo tem 33 círculos.

Gabarito

A região vermelha é formada pelo círculo central e por 16 anéis. A área de cada anel é a diferença entre as áreas dos círculos que o delimitam.

Etapla 1. Calcule a área de cada anel vermelho.

Os raios externos dos anéis vermelhos são $a + 2, a + 4, \dots, a + 32$. Para o anel de índice k , com $1 \leq k \leq 16$,

$$\begin{aligned}
 S_k &= \pi[(a + 2k)^2 - (a + 2k - 1)^2] \\
 &= \pi(2a + 4k - 1).
 \end{aligned}$$

Etapla 2. Some as áreas vermelhas.

As parcelas constantes dos 16 anéis formam a progressão $3, 7, \dots, 63$. Somando os anéis e o círculo central,

$$\begin{aligned}
 S &= \pi[a^2 + 32a + (3 + 7 + \dots + 63)] \\
 &= \pi\left[a^2 + 32a + \frac{(3 + 63) \cdot 16}{2}\right] \\
 &= \boxed{\pi(a^2 + 32a + 528)}.
 \end{aligned}$$

Questão 5

Quatro esferas idênticas, dispostas tangentes duas a duas, estão simultaneamente inscritas em uma única esfera maior, de modo que os centros das esferas menores formam um tetraedro regular. Calcule a razão entre o volume da esfera maior e a soma dos volumes das quatro esferas menores.

Gabarito

A tangência relaciona os raios das esferas à aresta e ao raio da esfera circunscrita ao tetraedro. A razão dos volumes resulta do cubo da razão entre os raios.

Etapla 1. Relacione os raios das esferas.

Se r é o raio de cada esfera menor, a aresta do tetraedro mede $a = 2r$. Por simetria, o centro O da esfera maior coincide com o centro do tetraedro. Seja O' um de seus vértices e R o raio da esfera maior. Pela tangência interna e pela geometria do tetraedro,

$$\begin{aligned} OO' &= R - r, \\ OO' &= \frac{a\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{r\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Igualando as distâncias, obtém-se

$$\begin{aligned} R - r &= \frac{r\sqrt{6}}{2}, \\ \frac{R}{r} &= \frac{2 + \sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Etapa 2. Calcule a razão entre os volumes.

Se V_1 é o volume da esfera maior e V_2 é a soma dos volumes das quatro esferas menores,

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right)^3 \\ &= \boxed{\frac{22 + 9\sqrt{6}}{16}}. \end{aligned}$$

Questão 6

Dados os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, defina as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, ambas de ordem $n \times n$, por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \geq i, \\ \alpha_j^{i-j-1}, & \text{se } j < i \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \geq i, \\ 0, & \text{se } j < i \end{cases}$$

Suponha que a soma dos elementos da coluna j da matriz AB seja igual a $n - j$.

- Determine o determinante de AB .
- Determine o traço de AB em função de n .
- Supondo que $n = 5$, determine todos os possíveis valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$.

Gabarito

A condição imposta às somas das colunas é incompatível com a forma das matrizes para $n \geq 2$. O exemplo de ordem 3 mostra o problema, que se repete nas duas últimas colunas para qualquer ordem maior que 1.

Etapa 1. Examine o produto para $n = 3$.



As matrizes definidas no enunciado são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A multiplicação fornece

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 + 1 & a_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

As colunas 2 e 3 são iguais, mas suas somas deveriam ser, respectivamente, 1 e 0.

Etapla 2. Verifique a incompatibilidade nos itens (a), (b) e (c).

Em geral, as duas últimas colunas de B diferem apenas na última entrada. Como a última coluna de A é nula, as duas últimas colunas de AB são iguais. Suas somas não podem ser simultaneamente $n - (n - 1) = 1$ e $n - n = 0$. Portanto, para $n \geq 2$, inclusive $n = 5$, tem-se

condições incompatíveis.

O gabarito da Pensi sugere a anulação e não fornece respostas numéricas para os itens (a), (b) e (c).

Questão 7

Seja $p(x)$ um polinômio de grau quatro com coeficientes reais. A soma das raízes de $p(x)$ é $\frac{3}{2}$, e o seu produto é $-\frac{5}{2}$. Determine todas as raízes de $p(x)$ em $\mathbb{C}$, sabendo que o resto da divisão de $p(x)$ por $x^3 - x + 4$ é igual a $9x^2 - 4x + 7$.

Gabarito

A divisão polinomial relaciona os coeficientes de $p(x)$ aos do quociente. As relações de Girard determinam esses coeficientes, permitindo fatorar o polinômio.

Etapla 1. Relacione os coeficientes pela divisão.

Escreva $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a \neq 0$. Como o divisor é mônico e cúbico, o quociente é $Q(x) = ax + b$. Logo,

$$p(x) = (x^3 - x + 4)(ax + b) + 9x^2 - 4x + 7.$$

A comparação dos coeficientes fornece

$$\begin{aligned} c &= -a + 9, \\ d &= -b + 4a - 4, \\ e &= 4b + 7. \end{aligned}$$

Etapla 2. Use a soma e o produto das raízes.

Pelas relações de Girard,



$$-\frac{b}{a} = \frac{3}{2},$$
$$\frac{e}{a} = -\frac{5}{2}.$$

Essas igualdades implicam $e = \frac{5b}{3}$. Combinando com $e = 4b + 7$,

$$\frac{5b}{3} = 4b + 7,$$
$$b = -3,$$
$$e = -5,$$
$$a = 2.$$

Assim, $c = 7$ e $d = 7$, de modo que

$$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 7x - 5.$$

Etapla 3. Fatore o polinômio e determine as raízes.

A substituição direta mostra que -1 e $\frac{1}{2}$ são raízes. Dividindo pelos fatores correspondentes,

$$p(x) = (x + 1)(2x - 1)(x^2 - 2x + 5).$$

O último fator se anula quando $(x - 1)^2 = -4$. Portanto, as quatro raízes são

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad 1 + 2i, \quad 1 - 2i.$$

Questão 8

Quantas sequências estritamente crescentes de três números naturais é possível construir de forma que a soma dos três números é igual a 100?

Gabarito

Primeiro contam-se todas as triplas de naturais positivos com soma 100. Depois excluem-se as que têm termos iguais e divide-se pelas permutações dos três termos distintos.

Etapla 1. Conte as triplas de naturais positivos.

Pela convenção da prova, os naturais começam em 1. Fazendo $x' = x - 1$, $y' = y - 1$ e $z' = z - 1$, a equação $x + y + z = 100$ torna-se

$$x' + y' + z' = 97,$$

com variáveis inteiras não negativas. O número de soluções é

$$N = \binom{99}{2}$$
$$= \frac{99 \cdot 98}{2}$$
$$= 4851.$$

Etapla 2. Exclua as triplas com termos iguais.

Os três termos não podem ser iguais, pois 100 não é múltiplo de 3. Se $x' = y'$, então $2x' + z' = 97$, com $x' = 0, 1, \dots, 48$: são 49 soluções.

Há três escolhas do par de termos iguais, sem sobreposição entre os casos. Restam, portanto,

$$N_{\text{distintos}} = 4851 - 3 \cdot 49$$
$$= 4704.$$

**Etapla 3.** Conte apenas as sequências crescentes.

Cada conjunto de três termos distintos foi contado $3! = 6$ vezes, e apenas uma dessas ordens é crescente. Assim,

$$N_{\text{crescente}} = \frac{4704}{6} = \boxed{784}.$$

Questão 9

Seja H a hipérbole com focos $A = (-6, 0)$, $B = (6, 0)$ e excentricidade 3.

- a) Determine as equações de todas as retas que passam por $C = (0, -8)$ e são tangentes a H .
b) Para cada reta do item anterior, determine os pontos de tangência.

Gabarito

Os focos e a excentricidade determinam a hipérbole. Na primeira resolução, a condição de tangência é imposta pelo discriminante; a segunda usa diretamente a equação da tangente.

Etapla 1. (a) Determine a equação da hipérbole.

A distância do centro a cada foco é $c = 6$. Como a excentricidade é $c/a = 3$, tem-se $a = 2$. Pela relação $a^2 + b^2 = c^2$,

$$\begin{aligned} b^2 &= 6^2 - 2^2 \\ &= 32. \end{aligned}$$

Portanto, a equação de H é

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1.$$

Etapla 2. (a) Imponha a condição de tangência.

Uma reta não vertical por C tem equação $y = mx - 8$. Substituindo na hipérbole,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} - \frac{(mx - 8)^2}{32} &= 1, \\ (m^2 - 8)x^2 - 16mx + 96 &= 0. \end{aligned}$$

Para uma raiz dupla, o discriminante deve ser nulo:

$$\begin{aligned} (-16m)^2 - 4 \cdot 96(m^2 - 8) &= 0, \\ -128m^2 + 3072 &= 0, \\ m^2 &= 24. \end{aligned}$$

A reta vertical $x = 0$ não intersecta a hipérbole. As duas tangentes são, portanto,

$$\boxed{y = \pm 2\sqrt{6}x - 8}.$$

Etapla 3. (b) Calcule os pontos de tangência.

A raiz dupla da equação de interseção é

$$\begin{aligned} x &= \frac{16m}{2(m^2 - 8)} \\ &= \frac{m}{2}, \\ y &= m \cdot \frac{m}{2} - 8 \\ &= 4. \end{aligned}$$



A tangente de inclinação positiva toca H em $(\sqrt{6}, 4)$; a de inclinação negativa, em $(-\sqrt{6}, 4)$.

Etapla 4. Confira os resultados pela equação da tangente.

Na segunda resolução, a tangente no ponto $T = (x_T, y_T)$ é escrita como

$$\frac{xx_T}{4} - \frac{yy_T}{32} = 1.$$

Como ela passa por $C = (0, -8)$, segue que $y_T = 4$. Substituindo na hipérbole, obtém-se $x_T = \pm\sqrt{6}$. Por fim, a equação da tangente fornece

$$\begin{aligned}\pm \frac{\sqrt{6}}{4}x - \frac{y}{8} &= 1, \\ y &= \pm 2\sqrt{6}x - 8.\end{aligned}$$

Questão 10

Os pontos A e B definem um segmento com $m(\overline{AB}) = 6(1 + \sqrt{3})$ cm. Os pontos C e D estão no segmento $\overline{AB}$. A circunferência de centro em C e passando por A e a circunferência de centro em D e passando por B se encontram nos pontos P e Q , que satisfazem

$$m(\overline{AP}) = m(\overline{PQ}), \quad m(\overline{BP}) = m(\overline{AP})\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

- Determine o raio de cada circunferência.
- Determine a área da região comum ao interior das duas circunferências.

Gabarito

A reta dos centros é mediatriz da corda comum PQ . Essa simetria permite calcular os raios por Pitágoras e decompor a área comum em dois segmentos circulares.

Etapla 1. (a) Determine o lado do triângulo APQ .

Como AB é mediatriz de PQ , tem-se $AQ = AP$ e $BP = BQ$. A condição $AP = PQ$ torna APQ equilátero. Seja $M = AB \cap PQ$ e $\ell = AP$. No triângulo retângulo PMB , pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}MB^2 &= PB^2 - PM^2 \\ &= \ell^2(2 + \sqrt{3}) - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\ &= \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4} \ell^2.\end{aligned}$$

Assim, $MB = \frac{\ell(2 + \sqrt{3})}{2}$. Como AM é a altura do triângulo equilátero,

$$\begin{aligned}AB &= AM + MB \\ &= \frac{\ell\sqrt{3}}{2} + \frac{\ell(2 + \sqrt{3})}{2} \\ &= \ell(1 + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Comparando com o comprimento dado, resulta $\ell = 6$ cm.

Etapla 2. (a) Calcule os dois raios.

O raio da circunferência de centro C , circunscrita a APQ , é



$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \\ &= \boxed{2\sqrt{3}\text{ cm}}. \end{aligned}$$

Para a circunferência de centro D , use $DM = MB - R_2$ e $DP = R_2$. Por Pitágoras em DPM ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (MB - R_2)^2 &= R_2^2, \\ 2MB \cdot R_2 &= \frac{\ell^2}{4} + MB^2 \\ &= (2 + \sqrt{3})\ell^2. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de MB ,

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{(2 + \sqrt{3})\ell^2}{2MB} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})\ell^2}{(2 + \sqrt{3})\ell} \\ &= \boxed{6\text{ cm}}. \end{aligned}$$

Etapla 3. (b) Calcule os segmentos circulares.

O triângulo DPQ é equilátero, pois $DP = DQ = PQ = 6\text{ cm}$. O setor correspondente tem ângulo de 60° . Subtraindo a área do triângulo, obtém-se o primeiro segmento circular:

$$\begin{aligned} S_D &= \frac{\pi R_2^2}{6} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \\ &= (6\pi - 9\sqrt{3})\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Na circunferência de centro C , o ângulo PCQ mede 120° . A área de CPQ é um terço da área de APQ . Portanto,

$$\begin{aligned} S_C &= \frac{\pi R_1^2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \\ &= (4\pi - 3\sqrt{3})\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Etapla 4. (b) Some as áreas dos dois segmentos.

A região comum é a união desses segmentos circulares:

$$\begin{aligned} S &= S_D + S_C \\ &= \boxed{(10\pi - 12\sqrt{3})\text{ cm}^2}. \end{aligned}$$